Муниципальное общеобразовательное бюджетное учреждение средняя общеобразовательная школа № 65 г. Сочи имени Героя Советского Союза Турчинского Адама Петровича
Муниципальное образование городской округ город-курорт Сочи Краснодарского края

РАССМОТРЕНО
на заседании методического объединения
учителей математики
МОБУ СОШ № 65 г. Сочи
им. Героя Советского Союза Турчинского А.П.
протокол № 2 от 23.10.2026

ОТ КУБИКА К СЕЧЕНИЮ

Сквозная подготовка по геометрии в 7–11 классах ко второй части заданий ОГЭ (геометрия, задания 23–25) и профильному ЕГЭ (задания 3 и 14)

Сборник дидактического материала

(сборник заданий с методическими пояснениями)

Авторы-составители:
Колганова Елена Петровна,
учитель математики высшей квалификационной категории;
Фролова Виктория Викторовна,
учитель математики;
Бош Клавдия Валерьевна,
учитель математики
МОБУ СОШ № 65 г. Сочи им. Героя Советского Союза Турчинского А.П.

Сочи, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

АННОТАЦИЯ....4
1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА....5
1.1. Актуальность и нормативные основания....5
1.2. Новизна....6
1.3. Краткая историческая справка....6
1.4. Источник практического опыта....7
1.5. Цель и задачи....8
1.6. Принцип систематизации материала....9
1.7. Особенности подачи материала....10
1.8. Особенности групп учащихся....11
1.9. Ожидаемые результаты....11
1.10. Структура и состав сборника....12
1.11. Распределение вклада авторов....13
1.12. Рекомендации по использованию....13
2. 7 КЛАСС. ПРОПЕДЕВТИКА: КУБ, РАЗВЁРТКИ, МОДЕЛИ (Бош К.В.; карточка - Фролова В.В.)....14
2.1. Блок «Куб и его развёртки» (Бош К.В.)....15
2.2. Блок «Кубики: счёт, окраска, виды» (Бош К.В.)....17
2.3. Блок «Сечения куба на моделях» (Бош К.В.)....19
2.4. Разноуровневая карточка «Каждый может». 7 класс (Фролова В.В.)....20
2.5. Сценарий занятия «Мастерская развёрток» (7 класс) (Бош К.В.)....21
3. 8 КЛАСС. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА, ПЛОЩАДИ И ПОДОБИЕ «ВНУТРИ КУБА» (Бош К.В.; карточка — Фролова В.В.)....22
3.1. Блок «Теорема Пифагора в кубе и параллелепипеде» (Бош К.В.)....23
3.2. Блок «Площади и подобие: сечения на моделях» (Бош К.В.)....24
3.3. Блок «От планиметрии 8 класса к ОГЭ» (Бош К.В.)....25
3.4. Разноуровневая карточка «Каждый может». 8 класс (Фролова В.В.)....26
3.5. Сценарий занятия «Аукцион сечений» (8 класс) (Бош К.В.)....27
4. 9 КЛАСС. ТРИГОНОМЕТРИЯ, КООРДИНАТЫ И ВТОРАЯ ЧАСТЬ ОГЭ (Бош К.В.; карточка — Фролова В.В.)....29
4.1. Блок «Решение треугольников в пространственных фигурах» (Бош К.В.)....29
4.2. Блок «Координаты и векторы — шаг к координатному методу» (Бош К.В.)..30
4.3. Блок «Правильные многоугольники — основания призм и пирамид» (Бош К.В.)....32
4.4. Блок «Задания 23–25 ОГЭ: полное решение» (Бош К.В.)....32
4.5. Разноуровневая карточка «Каждый может». 9 класс (Фролова В.В.)....34
4.6. Сценарий занятия «Экспедиция к пирамиде» (9 класс) (Бош К.В., Колганова Е.П.)....35
5. 10 КЛАСС. СЕЧЕНИЯ, ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ, УГЛЫ (Колганова Е.П.; карточка — Фролова В.В.)....37

5.1. Блок «Аксиомы стереометрии и построение сечений» (Колганова Е.П.) 37
5.2. Блок «Параллельность и перпендикулярность. Углы в пространстве» (Колганова Е.П.) 39
5.3. Блок «Задание 14: первое полное решение» (Колганова Е.П.) 40
5.4. Разноуровневая карточка «Каждый может». 10 класс (Фролова В.В.) 42
5.5. Сценарий занятия «Стереометрическая мастерская: заказ архитектора» (10 класс) (Колганова Е.П.) 43
6. 11 КЛАСС. ОБЪЁМЫ, ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ, КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД, ЗАДАНИЕ 14 (Колганова Е.П.; карточка — Фролова В.В.) 44
6.1. Блок «Объёмы и тела вращения» (Колганова Е.П.) 45
6.2. Блок «Координатный метод» (Колганова Е.П.) 46
6.3. Блок «Задание 14: два метода решения» (Колганова Е.П.) 48
6.4. Разноуровневая карточка «Каждый может». 11 класс (Фролова В.В.) 51
6.5. Сценарий занятия «Дуэль методов» (11 класс) (Колганова Е.П.) 51
7. ДИАГНОСТИКА И ТРАЕКТОРИЯ «КАЖДЫЙ МОЖЕТ» (Фролова В.В.) 53
7.1. Подходы к диагностике (Фролова В.В.) 53
7.2. Критерии уровней и траектория (Фролова В.В.) 54
7.3. Диагностическая работа «Пространственный старт» (переход из 9 в 10 класс) (Фролова В.В.) 55
7.4. Мини-работа «Я вижу пространство» (7 класс) (Фролова В.В.) 56
ОТВЕТЫ 57
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНТЕРНЕТ-ИСТОЧНИКОВ 61
ПРИЛОЖЕНИЯ 64
Приложение 1. Развёртки куба 64
Приложение 2. Шаблоны моделей многогранников 65
Приложение 3. Шаблоны изображений куба для построения сечений 66
Приложение 4. Лист самооценки 67
Приложение 5. Листы для групповой работы 68
Приложение 6. Карта роста «Каждый может» 70

АННОТАЦИЯ

Сборник дидактического материала «От кубика к сечению» адресован учителям математики 7–11 классов, работающим в общеобразовательных, предпрофильных и профильных классах, а также школьным методическим объединениям и руководителям математических кружков.

Суть работы - сквозная линия подготовки (с 7 по 11 класс) к геометрическим заданиям профильного ЕГЭ (задания 3 и 14 по нумерации КИМ ЕГЭ 2026 года) и к геометрическим заданиям второй части ОГЭ (задания 23–25). Пространственные представления формируются постепенно: от моделей куба, развёрток и кубиков в 7 классе через применение теоремы Пифагора, подобия и тригонометрии к пространственным конфигурациям в 8–9 классах к систематическому курсу стереометрии и полному решению экзаменационных задач в 10–11 классах.

Сборник содержит методические пояснения к каждому тематическому блоку, задания трёх уровней сложности с ответами, разноуровневые карточки «Каждый может», по одному сценарию занятия с игровым элементом для каждого класса, материалы для диагностики и приложения (развёртки, шаблоны, лист самооценки, листы для групповой работы, карта роста).

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

1.1. Актуальность и нормативные основания

Систематический курс стереометрии начинается только в 10 классе, а анализ результатов ЕГЭ, который публикует ФИПИ, показывает, что стереометрическую задачу с доказательством и вычислением (задание 14) полностью выполняют менее 10 % участников; в методических рекомендациях ФИПИ 2026 года подчёркнута необходимость «систематической, а не эпизодической» работы с базовыми стереометрическими понятиями, чертежом и пространственными конструкциями. Это и определяет актуальность сборника: подготовку к стереометрии целесообразно начинать задолго до 10 класса, опираясь на планиметрию 7–9 классов и на наглядные модели.

Нумерация заданий в сборнике сверена со спецификацией и демонстрационным вариантом КИМ ЕГЭ 2026 года по математике профильного уровня, опубликованными ФИПИ: работа содержит 19 заданий; стереометрический материал проверяется заданием 3 (часть 1, краткий ответ: вычисление длин, углов, площадей и объёмов) и заданием 14 (часть 2, развёрнутый ответ: доказательство и вычисление, максимальный балл - 3). Геометрический блок второй части ОГЭ 2026 года - задания 23 (вычисление), 24 (доказательство) и 25 (задача повышенного уровня сложности); именно в этих задачах проверяются навыки, способствующие развитию умений решать задания по стереометрии в старшей школе: применение теоремы Пифагора, подобия, тригонометрических соотношений, свойств четырёхугольников и окружности.

Целесообразность разработки определяется тем, что в учебниках геометрии 7–9 классов стереометрический материал представлен эпизодически, а подготовка к заданиям 3 и 14 ЕГЭ, начатая только в 10 классе, не обеспечивает достаточного времени для формирования пространственных представлений. Сборник восполняет этот пробел системой заданий, не дублирующих учебник: все задачи составлены авторами и проверены в практике преподавания в 7–11 классах МОБУ СОШ № 65 г. Сочи.

1.2. Новизна

Новизна работы состоит в том, что подготовка к стереометрическим заданиям выстроена как сквозная линия с 7 по 11 класс: каждое понятие старшей школы (сечение, угол между прямыми, проекция, координатный метод) имеет «предшественника» в 7–9 классах - модель, развёртку, планиметрическую задачу «внутри куба», а задания ОГЭ (23–25) и ЕГЭ (3, 14) рассматриваются как звенья одной цепочки.

1.3. Краткая историческая справка

Слово «стереометрия» происходит от греческих «стереос» - объёмный и «метрео» - измеряю. Систематическое изложение стереометрии содержится уже в XI–XIII книгах «Начал» Евклида (III в. до н. э.); XIII книга посвящена пяти правильным многогранникам. Архимед вычислил объём и площадь поверхности шара; по преданию, на его надгробии был изображён шар, вписанный в цилиндр (отношение их объёмов 2 : 3 — задача 11.1.7). Л. Эйлер доказал соотношение В − Р + Г = 2 для выпуклых многогранников, которое удобно «открывать» с семиклассниками. Р. Декарт и П. Ферма заложили основы метода координат - одного из двух основных способов решения задания 14 ЕГЭ, а Г. Монж создал начертательную геометрию, от которой ведут начало правила построения сечений. В отечественной школе традиции преподавания стереометрии связаны с учебниками А.П. Киселёва, А.В. Погорелова и Л.С. Атанасяна с соавторами; идея ранней пропедевтики реализована в курсе «Наглядная геометрия» И.Ф. Шарыгина и Л.Н. Ерганжиевой, и наш сборник продолжает эту линию в 7–9 классах.

1.4. Источник практического опыта

Сборник обобщает многолетний опыт работы авторов - учителей математики МОБУ СОШ № 65 г. Сочи. Е.П. Колганова (учитель высшей квалификационной категории) и В.В. Фролова преподают математику в 7–11 классах и готовят выпускников к ОГЭ и профильному ЕГЭ; К.В. Бош преподаёт в предпрофильном 7 классе и в 8–9 классах и готовит обучающихся к ОГЭ. Таким

образом, коллектив «перекрывает» всю вертикаль 7–11 классов: обучающиеся, начавшие работу с моделями у К.В. Бош, продолжают её у Е.П. Колгановой и В.В. Фроловой, а общая методическая позиция позволяет сохранять преемственность при переходе из основной школы в старшую.

Задачи составлены авторами специально для сборника по образцу заданий открытого банка ФИПИ.

Сборник окажет помощь:

– **учителям математики 7–9 классов** - готовыми заданиями и сценариями для пропедевтики стереометрии на уроках геометрии и внеурочных занятиях, а также задачами для подготовки ко второй части ОГЭ, «встроенными» в пространственные сюжеты;

– **учителям математики 10–11 классов** - системой заданий к заданиям 3 и 14 ЕГЭ с полными решениями двумя методами, материалами для групповой работы и диагностики;

– **молодым педагогам и методическим объединениям** - моделью преемственности между основной и старшей школой;

– **обучающимся и их родителям** - через карточки «Каждый может» и лист самооценки, позволяющие видеть собственное продвижение.

1.5. Цель и задачи

Цель: создание системы дидактических материалов для поэтапного формирования пространственных представлений и умений решать геометрические задачи второй части ОГЭ (задания 23–25) и стереометрические задачи профильного ЕГЭ (задания 3 и 14) у обучающихся 7–11 классов.

Образовательные задачи:

– сформировать у обучающихся систему представлений о многогранниках и телах вращения, их элементах, развёртках, изображениях и сечениях;

– научить применять факты планиметрии (теорему Пифагора, подобие, теоремы синусов и косинусов, свойства четырёхугольников) к вычислениям в пространственных конфигурациях;

– обучить классическому и координатному методам нахождения углов и расстояний в пространстве;

– научить записывать полное обоснованное решение в соответствии с критериями проверки заданий с развёрнутым ответом.

Развивающие задачи:

– развивать пространственное воображение, умение «читать» и выполнять чертёж, переходить от модели к изображению и обратно;

– развивать логическое мышление, умение выдвигать гипотезы и доказывать их;

– развивать умения самоконтроля и самооценки, рефлексии собственной деятельности;

– развивать коммуникативные умения: аргументировать, слушать, задавать вопросы, работать в группе в разных ролях.

Воспитательные задачи:

– воспитывать уважительное отношение к однокласснику, ответственность за общий результат группы;

– воспитывать настойчивость и терпение при решении трудных задач;

– воспитывать интерес к математике как к части общечеловеческой культуры через исторические сюжеты;

– формировать готовность к осознанному выбору профиля обучения и инженерных профессий.

1.6. Принцип систематизации материала

Материал систематизирован по **концентрическому принципу**: один и тот же объект (прежде всего куб) и одни и те же сюжеты (развёртка, кратчайший путь, сечение, угол между прямыми) возвращаются в каждом классе на новом уровне строгости. Внутри каждого класса материал разбит на **тематические блоки**, соответствующие федеральной рабочей программе по геометрии; внутри блока задания упорядочены **по трём уровням сложности**. Общая схема сквозной линии показана на рисунке 1, а связь блоков с экзаменационными заданиями — в таблице 1.



Рисунок 1. Сквозная линия сборника и распределение разделов между авторами

Таблица 1. Сквозная карта: от пропедевтики к экзаменационным заданиям

Класс	Ключевые темы блоков	Опора в курсе геометрии (ФРП)	Связь с ГИА
7	Куб, развёртки, кубики, сечения на моделях; равенство треугольников на гранях куба	Начальные понятия, треугольники, признаки равенства	Пропедевтика ЕГЭ 3, 14; ОГЭ 24 (доказательство)
8	Теорема Пифагора в кубе и параллелепипеде; площади; подобие и сечения	Четырёхугольники, площади, теорема Пифагора, подобие	ОГЭ 23, 25; ЕГЭ 3
9	Теоремы синусов и косинусов в пространственных фигурах; координаты и векторы; правильные многоугольники	Решение треугольников, векторы, метод координат, правильные многоугольники	ОГЭ 23–25; пропедевтика ЕГЭ 14
10	Аксиомы, сечения методом следов, параллельность и перпендикулярность, углы	Стереометрия: прямые и плоскости, многогранники	ЕГЭ 3, ЕГЭ 14 (пункт а)
11	Объёмы, тела вращения, координатный метод; полные решения задания 14	Тела вращения, объёмы, координаты и векторы	ЕГЭ 3, ЕГЭ 14 (пункты а и б)

Для каждого блока даётся **методическое пояснение** по единой схеме: *зачем* (какое умение формируется и к какому заданию ГИА оно ведёт), *как подать* (форма работы, наглядность, приёмы), *на каком этапе* урока или учебного года использовать. Задания пронумерованы тройным номером «класс.блок.задание», что позволяет легко ссылаться на них при планировании.

1.7. Особенности подачи материала

Материал сборника дифференцирован. Все задания даны в трёх уровнях сложности с правом выбора:

– «Я начинаю» - базовый уровень;

– «Я умею» - повышенный уровень;

– «Я исследую» - высокий уровень.

Ученик сам выбирает уровень и может в любой момент перейти на следующий. В конце каждого класса дана разноуровневая карточка «Каждый может», построенная по тем же трём уровням.

Каждый тематический блок открывается методическим пояснением по схеме «зачем - как подать - на каком этапе» (см. п. 1.7), затем идут задания трёх уровней с ответами.

Материал каждого класса изложен в одной последовательности. Например, в 7 классе (раздел 2): особенности работы в 7 классе (вводная часть раздела 2) → блок «Куб и его развёртки» (п. 2.1) → блок «Кубики: счёт, окраска, виды» (п. 2.2) → блок «Сечения куба на моделях» (п. 2.3) → разноуровневая карточка «Каждый может» (п. 2.4) → сценарий занятия «Мастерская развёрток» (п. 2.5). Так же построены разделы 3–6 для 8–11 классов.

1.8. Особенности групп учащихся

Материал рассчитан на разные группы обучающихся. В **предпрофильном 7 классе** (К.В. Бош) дети проявляют интерес к математике, но пространственные представления развиты неравномерно, поэтому обязательна опора на модели и развёртки, высока потребность в игровых формах и одобрении взрослого. **8–9 классы** разнородны по уровню подготовки: часть обучающихся ориентирована на профильное обучение, часть — на успешную сдачу ОГЭ, поэтому задания второй части ОГЭ сочетаются с посильными заданиями первого уровня. В **10–11 классах** (Е.П. Колганова, В.В. Фролова) обучаются как выбравшие профильный ЕГЭ (ведущая задача - задание 14), так и сдающие базовый уровень (уверенное решение задания 3 и задач уровня «Я начинаю»); групповая работа с чётким

распределением ролей позволяет объединять их в одной группе. Персональные данные обучающихся в сборнике не используются.

1.9. Ожидаемые результаты

В результате работы по сборнику:

– обучающиеся 7 класса различают развёртки куба, считают элементы многогранников, правильно изображают куб и описывают форму его сечений на моделях;

– обучающиеся 8 класса применяют теорему Пифагора и подобие для вычислений в кубе и прямоугольном параллелепипеде;

– обучающиеся 9 класса решают геометрические задания 23 и 24 ОГЭ, а подготовленные обучающиеся - задание 25; применяют теоремы синусов и косинусов и метод координат на плоскости;

– обучающиеся 10–11 классов уверенно решают задание 3 ЕГЭ, строят сечения методом следов и записывают полное решение пункта а) задания 14, а подготовленные обучающиеся решают задание 14 полностью классическим или координатным методом;

– обучающиеся умеют работать в группе в разных ролях, проводят взаимопроверку по критериям и оценивают собственное продвижение;

– учителя получают готовый согласованный комплект материалов, обеспечивающий преемственность между основной и старшей школой.

1.10. Структура и состав сборника

Сборник содержит:

– сквозную систему заданий трёх уровней сложности с методическими пояснениями для 7–11 классов (разделы 2–6); материал можно использовать целиком или отдельными блоками;

– полные решения заданий 23–25 ОГЭ и заданий 14 ЕГЭ (классическим и координатным методами), оформленные по критериям проверки;

– пять сценариев занятий (по одному для каждого класса) с игровыми элементами;

– разноуровневые карточки «Каждый может» для 7–11 классов;

– материалы для диагностики (раздел 7): диагностическую работу «Пространственный старт» и мини-работу «Я вижу пространство»;

– раздел «Ответы» с ответами ко всем заданиям, сгруппированными по разделам и номерам заданий;

– список литературы и интернет-источников;

– приложения: развёртки куба, шаблоны моделей и изображений куба, лист самооценки, листы для групповой работы, карта роста.

1.11. Распределение вклада авторов

Работа выполнена коллективно; ниже указано, за какие разделы и идеи отвечал каждый автор. Общие разделы (аннотация, пояснительная записка, список литературы) обсуждались и редактировались всеми авторами совместно.

Роли авторов: Бош К.В. разработала материалы для 7–9 классов (разделы 2–4: тематические блоки, задания 23–25 ОГЭ, сценарии занятий, приложения 1–4); Колганова Е.П. - материалы для 10–11 классов (разделы 5–6: построение сечений, задания 3 и 14 ЕГЭ классическим и координатным методами, сценарии занятий, приложение 5) и маршрутный лист к сценарию п. 4.6; Фролова В.В. - разноуровневые карточки «Каждый может» для 7–11 классов, раздел 7 (диагностика) и приложение 6. Авторство каждого материала указано под его заголовком и в содержании.

Таблица 2 . Распределение вклада авторов

Автор	Разделы сборника
Бош Клавдия Валерьевна (7 предпрофильный, 8–9 классы)	Раздел 2 (7 класс), раздел 3 (8 класс), раздел 4 (9 класс, в том числе блок заданий 23–25 ОГЭ); сценарии «Мастерская развёрток», «Аукцион сечений», «Экспедиция к пирамиде»; приложения 1–4 (развёртки, шаблоны моделей, шаблоны куба, лист самооценки)
Колганова Елена Петровна, учитель высшей квалификационной категории (7–11 классы)	Раздел 5 (10 класс), раздел 6 (11 класс): задачи задания 3 и задания 14 ЕГЭ с полными решениями классическим и координатным методами, критерии оценивания, опорный конспект; сценарии «Заказ архитектора», «Дуэль методов»; приложение 5 (листы для групповой работы, маршрутный лист, лист взаимопроверки)

Автор	Разделы сборника
Фролова Виктория Викторовна (7–11 классы)	Разноуровневые карточки «Каждый может» для 7–11 классов (пп. 2.4, 3.4, 4.5, 5.4, 6.4); раздел 7 (диагностика, критерии уровней, диагностические работы); приложение 6 (карта роста); трёхуровневая структура заданий всего сборника

1.12. Рекомендации по использованию

– Сборник можно использовать целиком как сквозную линию 7–11 классов или отдельными блоками на уроках геометрии, во внеурочной деятельности и при подготовке к ОГЭ и ЕГЭ.

– Блоки 7–9 классов рекомендуется включать в уроки геометрии по мере изучения соответствующих тем федеральной рабочей программы (см. таблицу 1).

– Перед началом работы в 10 классе целесообразно провести диагностическую работу «Пространственный старт» (п. 7.3), в 7 классе - мини-работу «Я вижу пространство» (п. 7.4).

– Разноуровневые карточки «Каждый может» удобно использовать для итогового контроля по блоку; ответы ко всем заданиям приведены в разделе «Ответы».

– Приложения 1–3 рекомендуется распечатать на плотной бумаге для изготовления моделей; приложения 4–6 - для групповой работы и самооценки.

2. 7 КЛАСС. ПРОПЕДЕВТИКА: КУБ, РАЗВЁРТКИ, МОДЕЛИ

Бош Клавдия Валерьевна,

учитель математики

МОБУ СОШ № 65 г. Сочи им. Героя Советского Союза Турчинского А.П.

Задача раздела - сохранить и развить пространственные представления при переходе к строгой планиметрии, опираясь на модели, развёртки и кубики, и использовать грани куба как «полигон» для первых доказательств (признаки равенства треугольников). У каждой группы есть набор кубиков, бумажный и

прозрачный куб (пластиковая коробка, которую можно частично заполнить водой).

Обозначения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, которые используются во всём сборнике, показаны на рисунке 2. Уже в 7 классе мы приучаем детей к правилу: невидимые рёбра изображаются штриховыми линиями.

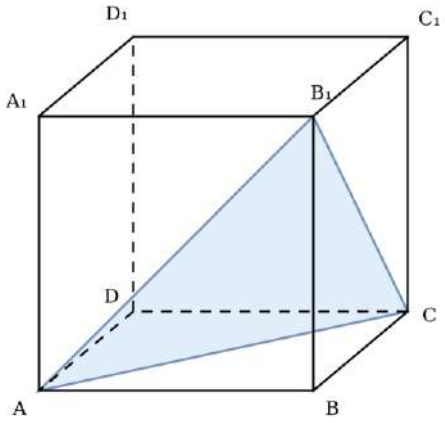


Рисунок 2. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и треугольник AB_1C

2.1. Блок «Куб и его развёртки»

Методическое пояснение. *Зачем.* Развёртка - первый инструмент перехода от пространственной фигуры к плоской. Умение мысленно «сворачивать» и «разворачивать» многогранник понадобится при решении задач на кратчайший путь по поверхности, при вычислении площади поверхности (задание 3 ЕГЭ) и при поиске линии пересечения плоскости с гранями (сечения, задание 14). *Как подать.* Начинаем с «чуда»: учитель показывает шесть одинаковых квадратов, соединённых в полоску 2 × 3, и пытается свернуть из неё куб - не получается. Почему? Дети в группах вырезают фигуры из клетчатой бумаги и проверяют гипотезы руками. Ошибочная развёртка не «плохая», а полезная: она показывает, какое правило нарушено. *На каком этапе.* Блок удобно проводить в начале учебного года (вводные уроки геометрии, тема «Начальные геометрические сведения») или во внеурочной деятельности; задачи уровня 1 используются для устного счёта на последующих уроках.

Уровень 1 «Я начинаю»

Задание 7.1.1. Сколько граней, рёбер и вершин у куба? Проверьте, выполняется ли для куба равенство В − Р + Г = 2. *Ответ:* 6 граней, 12 рёбер, 8 вершин; 8 − 12 + 6 = 2 - выполняется.

Задание 7.1.2. Какие из фигур на рисунке 3 являются развёртками куба?

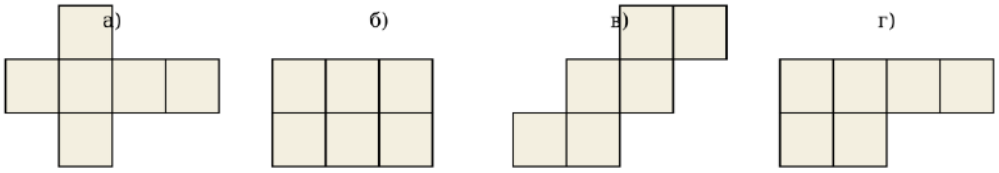


Рисунок 3. Фигуры из шести квадратов к заданию 7.1.2

Ответ: а) и в). Фигура б) прямоугольник 2 × 3, при сворачивании две грани совпадают; в фигуре г) два верхних квадрата при сворачивании оказываются на месте одной и той же грани.

Задание 7.1.3. Ребро куба равно 3 см. Найдите сумму длин всех его рёбер и площадь его поверхности. *Ответ:* 36 см; 54 см².

Уровень 2 «Я умею»

Задание 7.1.4. На рисунке 4 изображена развёртка куба, грани которой обозначены буквами. Какая грань окажется противоположной грани В? грани А? грани Е?

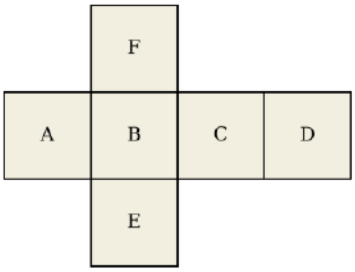


Рисунок 4. Развёртка куба к заданиям 7.1.4 и 7.1.5

Ответ: В и D; А и С; Е и F.

Задание 7.1.5. Из развёртки на рисунке 4 делают игральный кубик, у которого сумма очков на противоположных гранях равна 7. На грани А поставили 3 очка, на грани Е - 5 очков. Сколько очков нужно поставить на остальных гранях? *Ответ:* С - 4, F- 2, на гранях В и D - 1 и 6 (в любом порядке).

Задание 7.1.6. Сколько всего существует различных развёрток куба (развёртки, совпадающие при повороте или отражении, считаются одинаковыми)? Найдите как можно больше из них на клетчатой бумаге.

Ответ: 11 (все развёртки приведены в приложении 1). Задание выполняется в группах; итог- общий «каталог развёрток» класса.

Уровень 3 «Я исследую»

Задание 7.1.7. Муравей ползёт по поверхности куба с ребром 3 см из вершины A в противоположную вершину C_1. Нарисуйте на развёртке кратчайший путь муравья и измерьте его длину линейкой. Сколько существует таких кратчайших путей?

Ответ: кратчайший путь - отрезок, соединяющий A и C_1 на развёртке двух соседних граней (рисунок 5); его длина ≈ 6,7 см. Таких путей 6 (по числу пар соседних граней, содержащих A и C_1 соответственно). Точное значение $3\sqrt{5}$ см ученики получат в 8 классе (задание 8.1.6).

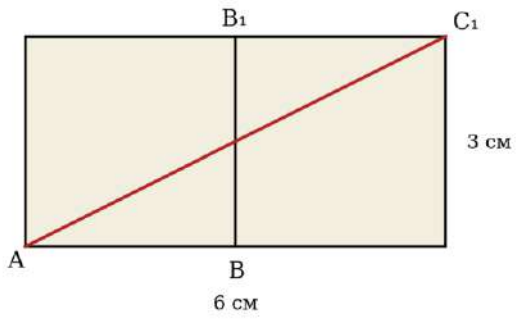


Рисунок 5. Кратчайший путь по поверхности куба на развёртке двух граней

Задание 7.1.8. Можно ли развёртку куба вырезать из квадрата 3 × 3 клетки? из прямоугольника 2 × 5 клеток? Ответ обоснуйте.

Ответ: из прямоугольника 2 × 5 - можно: развёртка из двух рядов по три квадрата со сдвигом (приложение 1, № 8) занимает его целиком; из квадрата 3 × 3 - нельзя: каждая из 11 развёрток имеет протяжённость не менее четырёх клеток по одному из направлений (это видно по каталогу из приложения 1), поэтому в квадрат 3 × 3 ни одна из них не помещается.

2.2. Блок «Кубики: счёт, окраска, виды»

Методическое пояснение. *Зачем.* Счёт кубиков в постройке, работа с видами (спереди, сверху, слева) и задачи на окраску учат мысленно «просвечивать» фигуру, различать видимые и невидимые элементы - это прямой путь к правильному чертежу со штриховыми линиями и к пониманию проекции. *Как подать.* Каждая группа получает набор кубиков и план постройки; «чертёжник» строит, «контролёр» сверяет вид спереди с рисунком, «спикер» объясняет классу. Задачи на окраску сначала решаются на реальной модели 3 × 3 × 3 (кубик Рубика или склеенные кубики), затем - без модели. *На каком этапе.* Мотивационная часть урока, устная работа, «минутка пространства» в конце урока; задачи уровня 3 подходят для внеурочной деятельности.

Уровень 1 «Я начинаю»

Задание 7.2.1. Из скольких единичных кубиков состоит прямоугольный параллелепипед 2 × 3 × 4? куб с ребром 4? *Ответ:* 24; 64.

Задание 7.2.2. В таблице 3 показан план постройки из кубиков: в каждой клетке записано, сколько кубиков стоит в этом столбике. Сколько кубиков в постройке? Нарисуйте вид спереди (смотрим со стороны нижней строки плана).

Таблица 3. План постройки к заданию 7.2.2 (вид сверху, «перед» — снизу)

3	1	2
2	0	1

Ответ: 9 кубиков; вид спереди - три столбика высотой 3, 1 и 2 (в каждом столбце видна наибольшая высота).

Уровень 2 «Я умею»

Задание 7.2.3. Деревянный куб окрасили снаружи и распилили на 27 одинаковых кубиков. Сколько получилось кубиков, у которых окрашены ровно три грани? ровно две? ровно одна? ни одной?

Ответ: 8 (угловые), 12 (по одному на каждом ребре), 6 (центры граней), 1 (центральный). Проверка: 8 + 12 + 6 + 1 = 27.

Задание 7.2.4. Площадь поверхности куба равна 150 см². Найдите его объём. *Ответ:* площадь одной грани 25 см², ребро 5 см, объём 125 см³.

Уровень 3 «Я исследую»

Задание 7.2.5. Окрашенный куб распилили на 64 одинаковых кубика. Ответьте на те же вопросы, что и в задании 7.2.3. Попробуйте записать ответ для куба, распиленного на n × n × n кубиков. *Ответ:* 8; 24; 24; 8. В общем случае: 8; $12(n-2)$; $6(n-2)^2$; $(n-2)^3$.

Задание 7.2.6. Какое наименьшее число кубиков нужно, чтобы построить фигуру, у которой вид спереди и вид сбоку - квадраты 2 × 2?

Ответ: 4 кубика (например, по два кубика в двух диагонально расположенных клетках квадрата 2 × 2 плана).

2.3. Блок «Сечения куба на моделях»

Методическое пояснение. *Зачем.* Сечения - центральная тема задания 14 ЕГЭ, но в 10 классе многие ученики впервые «видят» сечение только на чертеже. Работа с моделями в 7 классе создаёт яркий образ: поверхность воды в наклонённом аквариуме, срез пластилинового куба ниткой. Одновременно в этом блоке появляются первые доказательства «на гранях куба» с помощью признаков равенства треугольников. *Как подать.* Прозрачный куб заполняется подкрашенной водой примерно наполовину; группы наклоняют его и зарисовывают форму поверхности воды. Затем пластилиновые кубы разрезаются ниткой. Учитель не даёт готовых ответов, а задаёт вопросы: «Сколько сторон может быть у сечения? Почему не больше шести?» *На каком этапе.* Урок-исследование в конце первого полугодия или в конце года; задачи на равенство треугольников — после изучения признаков равенства.

Уровень 1 «Я начинаю»

Задание 7.3.1. Какую форму имеет поверхность воды в прозрачном кубе, стоящем на грани? Если куб наклонить, опирая его на ребро? *Ответ:* квадрат; прямоугольник (если вода не касается верхней грани).

Задание 7.3.2. Назовите все рёбра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, параллельные ребру AA_1, и все рёбра, которые пересекают ребро AA_1 под прямым углом.

Ответ: параллельны BB_1, CC_1, DD_1; под прямым углом его пересекают AB, AD, A_1B_1, A_1D_1. В 10 классе выяснится, что рёбрам BC, CD, B_1C_1, C_1D_1 ребро AA_1 тоже перпендикулярно, хотя и не пересекает их.

Уровень 2 «Я умею»

Задание 7.3.3. Можно ли так наклонить куб с водой, чтобы поверхность воды имела форму треугольника? шестиугольника? Покажите на модели.

Ответ: да, в обоих случаях: треугольник - если куб стоит на вершине и воды немного; шестиугольник - если куб стоит на вершине и налита ровно половина объёма (это правильный шестиугольник, рисунок 6).

Задание 7.3.4. Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рисунок 2) треугольник AB_1C равносторонний. Чему равны его углы?

Ответ и решение: прямоугольные треугольники ABB_1, CBB_1 и ABC равны по двум катетам (катеты - рёбра куба), поэтому $AB_1 = CB_1 = AC$. Треугольник равносторонний, все его углы равны 60°. К этому факту мы вернёмся в 10 классе (угол между скрещивающимися прямыми, задание 10.2.1).

Уровень 3 «Я исследую»

Задание 7.3.5. Может ли сечение куба плоскостью быть семиугольником? Ответ обоснуйте.

Ответ: нет. Каждая сторона сечения лежит в одной из граней куба, причём в каждой грани - не более одной стороны (плоскость пересекает плоскую грань по отрезку). Граней шесть, поэтому у сечения не более шести сторон.

Задание 7.3.6. На модели куба отметьте середины трёх рёбер, выходящих из одной вершины, и разрежьте пластилиновый куб плоскостью через эти точки. Какой формы сечение? Докажите это.

Ответ: равносторонний треугольник; его стороны - гипотенузы трёх равных прямоугольных треугольников с катетами, равными половине ребра (равенство по двум катетам).

2.4. Разноуровневая карточка «Каждый может». 7 класс

Фролова Виктория Викторовна,

учитель математики

МОБУ СОШ № 65 г. Сочи им. Героя Советского Союза Турчинского А.П.

Методическое пояснение. Карточка выдаётся в конце изучения блоков 2.1–2.3. Ученик сам выбирает, с какого уровня начать; переход на следующий уровень приветствуется, но не требуется. Первое задание каждого уровня рассчитано на гарантированный успех. Ответы выдаются после выполнения для самопроверки, а учитель комментирует продвижение на карте роста (приложение 6).

Таблица 4. Карточка «Каждый может» для 7 класса

Уровень	Задания	Ответы
«Я начинаю»	1) Сколько квадратов в развёртке куба? 2) Найдите объём куба с ребром 3 см.	1) 6 2) 27 см³
«Я умею»	1) Сумма длин всех рёбер куба равна 48 см. Найдите его ребро. 2) Найдите площадь поверхности куба с ребром 4 см.	1) 4 см 2) 96 см²
«Я исследую»	1) Из 8 кубиков сложили куб 2 × 2 × 2 и окрасили снаружи. У скольких кубиков окрашены ровно три грани? 2) Площадь поверхности куба 150 см². Найдите его объём.	1) у всех 8 2) 125 см³

2.5. Сценарий занятия «Мастерская развёрток» (7 класс)

Тип занятия: урок открытия нового знания с элементами исследования (возможна внеурочная форма). **Продолжительность:** 45 минут. **Оборудование:** клетчатая бумага, ножницы, скотч, бумажные кубы, прозрачный куб, магнитная доска, лист самооценки (приложение 4).

Цель: обучающиеся выясняют, какие фигуры из шести квадратов являются развёртками куба, и находят все 11 развёрток.

Игровой элемент «Конструкторское бюро "Кубик"»:

– *Дидактическая задача:* научиться распознавать развёртки куба и мысленно сворачивать их; ввести понятие противоположных граней.

– *Игровая задача:* бюро получило заказ от упаковочной фабрики - найти все возможные «выкройки» кубической коробки, чтобы выбрать самую экономичную.

– *Игровые действия:* группы (4 человека: конструктор, чертёжник, контролёр, спикер) рисуют фигуры на клетчатой бумаге, вырезают, сворачивают, проверяют и «регистрируют» найденную выкройку в «патентном бюро» на доске.

– *Правила:* выкройки, совпадающие при повороте или отражении, повторно не регистрируются; каждый член группы предлагает хотя бы одну выкройку; неудачная выкройка не штрафуется, а сдаётся в «музей опыта» с подписью, почему она не складывается.

– *Результат:* общий каталог из 11 развёрток, «музей опыта» с объяснением типичных ошибок, отметка каждого ученика в листе самооценки.

Таблица 5. Ход занятия «Мастерская развёрток»

Этап	Время	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся
Вводная (мотивационная) часть	7 мин	Приветствие «Я рада вас видеть, сегодня у нас необычная работа». Демонстрирует «чудо»: из полоски 2 × 3 куб не складывается. Объявляет заказ фабрики.	Высказывают гипотезы, почему не получился куб; распределяют роли в группах.
Основная (деятельностная) часть	28 мин	Консультирует группы, не давая готовых ответов; ведёт «патентное бюро» на доске; в середине работы допускает намеренную ошибку при регистрации выкройки.	Ищут развёртки, сворачивают, проверяют, регистрируют; находят ошибку учителя; решают задания 7.1.4 и 7.1.5 по зарегистрированной развёртке.
Заключительная часть (рефлексия)	10 мин	Подводит итог: сколько найдено развёрток; предлагает выбрать домашнее задание одного из трёх уровней (карточка 2.4).	Заполняют лист самооценки: «Сегодня я научился…», «Мне было трудно…», «Я помог группе…»; выбирают уровень домашнего задания.

Комментарий. Ненайденные за урок развёртки ищут дома (уровень «Я исследую»); уровень «Я начинаю» - склеить куб по любой развёртке, «Я умею» - задания 7.1.4–7.1.5.

3. 8 КЛАСС. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА, ПЛОЩАДИ И ПОДОБИЕ «ВНУТРИ КУБА»

Бош Клавдия Валерьевна,

учитель математики

МОБУ СОШ № 65 г. Сочи им. Героя Советского Союза Турчинского А.П.

Теоремы 8 класса - Пифагора, о площадях, о подобии - «работают» в пространстве: диагональ куба, путь муравья по коробке, площадь сечения вычисляются именно ими. Ученик учится «вынимать» из фигуры плоский треугольник - ключевое умение для задания 3 и пункта б) задания 14 ЕГЭ; параллельно отрабатываются конструкции заданий 23–25 ОГЭ.

3.1. Блок «Теорема Пифагора в кубе и параллелепипеде»

Методическое пояснение. *Зачем.* Нахождение диагоналей граней и пространственной диагонали, расстояний между точками на поверхности - базовые вычисления задания 3 ЕГЭ и необходимый шаг почти любого решения задания 14. *Как подать.* Используются каркасные модели куба и параллелепипеда (из трубочек или проволоки) и натянутая нить, изображающая диагональ. Ученик сначала находит на модели прямоугольный треугольник, в котором искомый отрезок - гипотенуза, затем выносит этот треугольник на отдельный чертёж («выносной чертёж» — приём, который сохраняется до 11 класса). *На каком этапе.* Сразу после доказательства теоремы Пифагора - как задачи на применение; в течение года - для устной работы; в конце года - в итоговом повторении.

Уровень 1 «Я начинаю»

Задание 8.1.1. Ребро куба равно 5. Найдите диагональ его грани. *Ответ:* $5\sqrt{2}$.

Задание 8.1.2. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 3, 4 и 12. Найдите диагональ его основания со сторонами 3 и 4 и диагональ параллелепипеда. *Ответ:* 5; 13 (из прямоугольного треугольника с катетами 5 и 12).

Уровень 2 «Я умею»

Задание 8.1.3. Диагональ куба равна $6\sqrt{3}$. Найдите ребро, площадь поверхности и объём куба.

Ответ: диагональ куба с ребром a равна $a\sqrt{3}$, поэтому $a = 6$; площадь поверхности 216; объём 216.

Задание 8.1.4. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2. Найдите расстояние от вершины A до центра грани BB_1C_1C.

Ответ: пусть O - центр грани; проведём $OK \perp BC$, K - середина BC, $OK = 1$. Тогда $AK^2 = AB^2 + BK^2 = 4 + 1 = 5$; треугольник AKO прямоугольный (OK перпендикулярна плоскости основания - на модели это видно как «вертикальный» отрезок), $AO^2 = 5 + 1 = 6$, $AO = \sqrt{6}$.

Задание 8.1.5. Площадь поверхности куба равна 18. Найдите его диагональ. *Ответ:* $6a^2 = 18$, $a^2 = 3$, $a = \sqrt{3}$; диагональ $a\sqrt{3} = 3$. (Задача-прототип задания 3 ЕГЭ.)

Уровень 3 «Я исследую»

Задание 8.1.6. Вернёмся к задаче 7.1.7: найдите точно длину кратчайшего пути муравья по поверхности куба с ребром 3 см из вершины A в вершину C_1.

Ответ: на развёртке двух соседних граней получаем прямоугольник 6×3 (рисунок 5); путь - его диагональ: $\sqrt{(36 + 9)} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ см $\approx 6{,}7$ см. Ученики сравнивают точный результат со своим измерением из 7 класса — это яркий пример преемственности.

Задание 8.1.7. Муравей ползёт по поверхности закрытой коробки размером $3 \times 4 \times 5$ из одной вершины в противоположную. Найдите длину кратчайшего пути.

Ответ: возможны три варианта развёртки двух соседних граней: $\sqrt{((3 + 4)^2 + 5^2)} = \sqrt{74}$, $\sqrt{((3 + 5)^2 + 4^2)} = \sqrt{80}$, $\sqrt{((4 + 5)^2 + 3^2)} = \sqrt{90}$. Кратчайший путь равен

$\sqrt{74} \approx 8{,}6$. Вывод, который делают сами ученики: «складывать нужно два меньших измерения».

3.2. Блок «Площади и подобие: сечения на моделях»

Методическое пояснение. *Зачем.* Площадь сечения - частый вопрос пункта б) задания 14; подобие и средняя линия треугольника - основной инструмент при построении сечений пирамиды и при вычислении отношений отрезков. *Как подать.* Группы получают пластилиновые (или пенопластовые) кубы и бумажные пирамиды, отмечают точки фломастером и выполняют разрез ниткой или канцелярским ножом (под контролем учителя). Обязательная последовательность: модель → рисунок сечения → выносной чертёж многоугольника → вычисление. *На каком этапе.* После тем «Площади многоугольников» и «Подобие треугольников»; модельные эксперименты удобно проводить на сдвоенном уроке или во внеурочной деятельности.

Уровень 1 «Я начинаю»

Задание 8.2.1. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда с измерениями 2, 3 и 4. *Ответ:* $2 \cdot (2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4) = 52$.

Задание 8.2.2. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4, точки M и N - середины рёбер AB и BC. Найдите MN. *Ответ:* MN - средняя линия треугольника ABC, $MN = AC/2 = 4\sqrt{2}/2 = 2\sqrt{2}$.

Уровень 2 «Я умею»

Задание 8.2.3. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2. Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точки A, B_1 и C.

Ответ: сечение - равносторонний треугольник AB_1C (задание 7.3.4) со стороной $2\sqrt{2}$; площадь $(\sqrt{3}/4) \cdot (2\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{3}$.

Задание 8.2.4. В условиях задания 8.2.2 через точки M и N провели плоскость, параллельную ребру BB_1. Определите вид сечения и найдите его площадь.

Ответ: сечение - прямоугольник MNN_1M_1, где M_1 и N_1 - середины A_1B_1 и B_1C_1; его стороны $2\sqrt{2}$ и 4, площадь $8\sqrt{2}$.

Уровень 3 «Я исследую»

Задание 8.2.5. Бумажную пирамиду разрезали плоскостью, проходящей через середины всех боковых рёбер. Во сколько раз периметр сечения меньше периметра основания? Во сколько раз меньше площадь? Найдите площадь сечения, если площадь основания равна 36.

Ответ: каждая сторона сечения - средняя линия боковой грани, поэтому сечение подобно основанию с коэффициентом 1/2: периметр меньше в 2 раза, площадь — в 4 раза; площадь сечения 9.

Задание 8.2.6. Ребро куба равно 4. Сечение проходит через середины шести рёбер AB, BC, CC_1, C_1D_1, D_1A_1, A_1A (рисунок 6). Докажите, что сечение — правильный шестиугольник, и найдите его площадь.

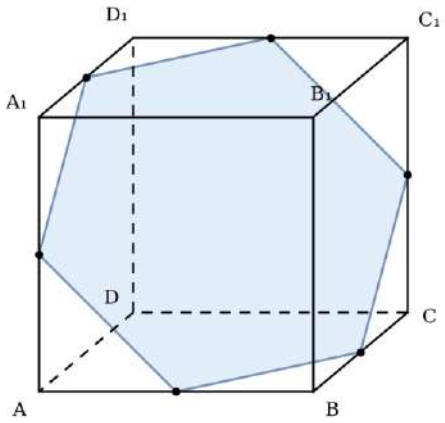


Рисунок 6. Сечение куба - правильный шестиугольник

Ответ: каждая сторона - средняя линия прямоугольного треугольника с катетами 4, поэтому все стороны равны $2\sqrt{2}$. Равенство углов следует из равенства шести треугольников, на которые шестиугольник делится отрезками, соединяющими его вершины с центром куба (все эти отрезки равны половине диагонали грани, т. е. $2\sqrt{2}$). Значит, шестиугольник состоит из шести равносторонних треугольников со стороной $2\sqrt{2}$, и его площадь $6 \cdot (\sqrt{3}/4) \cdot 8 = 12\sqrt{3}$.

3.3. Блок «От планиметрии 8 класса к ОГЭ»

Методическое пояснение. *Зачем.* Задания 23–25 ОГЭ опираются на материал 8 класса: свойства параллелограмма и ромба, теорему Пифагора, подобие, метрические соотношения в прямоугольном треугольнике. Эти же конструкции будут встречаться в гранях и сечениях многогранников. *Как*

подать. Каждую задачу полезно сопровождать вопросом «Где эта фигура может встретиться в кубе или пирамиде?» - так планиметрическая задача становится «кирпичиком» будущей стереометрии. Решения задач на доказательство оформляются письменно по образцу критериев ОГЭ. *На каком этапе.* В течение учебного года после соответствующих тем; в конце года — в рамках итогового повторения.

Уровень 1 «Я начинаю»

Задание 8.3.1. Диагонали ромба равны 10 и 24. Найдите сторону ромба.

Ответ: диагонали ромба перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам; сторона = $\sqrt{(5^2 + 12^2)} = 13$.

Уровень 2 «Я умею»

Задание 8.3.2 *(тип задания 24 ОГЭ).* Точки M и N - середины сторон BC и AD параллелограмма ABCD. Докажите, что четырёхугольник AMCN - параллелограмм.

Решение: AN = AD/2, MC = BC/2, AD = BC, значит AN = MC; кроме того AN ∥ MC, так как AD ∥ BC. Четырёхугольник, у которого две противоположные стороны равны и параллельны, - параллелограмм.

Уровень 3 «Я исследую»

Задание 8.3.3 *(тип задания 25 ОГЭ).* В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C высота CH делит гипотенузу на отрезки AH = 4 и BH = 9. Найдите CH и площадь треугольника ABC.

Ответ: треугольники ACH и CBH подобны, поэтому $CH^2 = AH \cdot BH = 36$, CH = 6; AB = 13, площадь $(1/2) \cdot 13 \cdot 6 = 39$.

3.4. Разноуровневая карточка «Каждый может». 8 класс

Фролова Виктория Викторовна,

учитель математики

МОБУ СОШ № 65 г. Сочи им. Героя Советского Союза Турчинского А.П.

Методическое пояснение. Карточка используется на уроке обобщения по теме «Теорема Пифагора» или как домашняя работа по выбору. Ученик

фиксирует выбранный уровень на карте роста; при успешном выполнении он может «подняться» на следующий уровень уже на этом же уроке.

Таблица 6. Карточка «Каждый может» для 8 класса

Уровень	Задания	Ответы
«Я начинаю»	1) Катеты прямоугольного треугольника равны 6 и 8. Найдите гипотенузу. 2) Найдите диагональ квадрата со стороной 7.	1) 10 2) $7\sqrt{2}$
«Я умею»	1) Найдите диагональ куба с ребром 2. 2) Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 2, 3 и 6. Найдите его диагональ.	1) $2\sqrt{3}$ 2) 7
«Я исследую»	1) Диагональ куба равна 9. Найдите площадь его поверхности. 2) Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4. Найдите расстояние от вершины A до середины ребра C_1D_1.	1) 162 2) 6

Пояснения к уровню «Я исследую»: 1) $a = 9/\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$, $a^2 = 27$, $S = 6 \cdot 27 = 162$; 2) если K - середина C_1D_1, а K_0 - середина CD, то $AK_0^2 = 16 + 4 = 20$, $AK^2 = 20 + 16 = 36$, $AK = 6$.

3.5. Сценарий занятия «Аукцион сечений» (8 класс)

Тип занятия: урок-практикум с элементами исследования. **Продолжительность:** 45 минут (лучше - сдвоенный урок). **Оборудование:** пластилиновые кубы (по одному на группу), нить, фломастеры, прозрачный куб с подкрашенной водой, бланки «лотов», шаблоны изображений куба (приложение 3), лист самооценки.

Цель: обучающиеся исследуют, какие многоугольники могут получиться в сечении куба, обосновывают возможность или невозможность сечения заданного вида и вычисляют элементы сечения с помощью теоремы Пифагора.

Игровой элемент «Аукцион сечений»:

– *Дидактическая задача:* сформировать представление о возможных сечениях куба; научить обосновывать вид сечения и вычислять его стороны.

– *Игровая задача:* выкупить на аукционе как можно больше «лотов» - видов многоугольников, доказав, что каждый из них может (или не может) быть сечением куба.

– *Игровые действия:* группа «покупает» лот (например, «ромб, не являющийся квадратом»), показывает разрез на пластилиновом кубе, изображает сечение на шаблоне и даёт словесное обоснование; если лот «невозможный», группа доказывает невозможность.

– *Правила:* у каждой группы стартовый капитал 10 «кубитов»; лот стоит 2 кубита, при успешной защите группа получает 4 кубита, за доказательство невозможности - 6; защищать лот может любой участник группы, которого выбирает учитель (принцип «один за всех»); при неудаче лот возвращается на аукцион, а группа не теряет капитал - «ошибка тоже вклад».

– *Результат:* классная таблица «возможные и невозможные сечения куба», заполненная обоснованиями; каждая группа вычисляет стороны одного из своих сечений для куба с ребром 4.

Лоты аукциона: треугольник; равносторонний треугольник; прямоугольный треугольник; квадрат; прямоугольник, не являющийся квадратом; ромб, не являющийся квадратом; трапеция; пятиугольник; правильный пятиугольник; правильный шестиугольник; семиугольник.

Ключ для учителя: возможны все, кроме прямоугольного треугольника, правильного пятиугольника и семиугольника. Треугольное сечение отсекает от куба уголок с рёбрами a, b, c; квадраты его сторон равны $a^2 + b^2$, $b^2 + c^2$, $a^2 + c^2$, и по теореме косинусов (или, для 8 класса, сравнением квадратов сторон) каждый угол острый. У пятиугольного сечения две пары параллельных сторон (они лежат в параллельных гранях), а у правильного пятиугольника параллельных сторон нет. Семиугольник невозможен (задание 7.3.5). Ромб получается, например, при сечении плоскостью через вершины A, C_1 и середины рёбер BB_1 и DD_1.

Таблица 7. Ход занятия «Аукцион сечений»

Этап	Время	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся
Вводная (мотивационная) часть	7 мин	Показывает прозрачный куб с водой, наклоняет его: «Какие фигуры вы видите? Сколько сторон может быть у поверхности воды?»	Наблюдают, высказывают гипотезы, записывают их на стикерах; распределяют роли.

Этап	Время	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся
		Объявляет аукцион и правила.	
Основная (деятельностная) часть	28 мин	Ведёт аукцион, выбирает защищающего ученика, задаёт уточняющие вопросы, фиксирует результаты в таблице на доске; к каждому лоту даёт задачу на вычисление (ребро 4).	Выполняют разрезы, изображают сечения, обосновывают; вычисляют стороны сечений по теореме Пифагора; проводят взаимопроверку вычислений.
Заключительная часть (рефлексия)	10 мин	Подводит итоги без выделения «проигравших»: отмечает лучшее обоснование, самый смелый лот, лучшую взаимопомощь. Предлагает домашнее задание трёх уровней.	Сравнивают свои стартовые гипотезы с итоговой таблицей; заполняют лист самооценки; выбирают уровень задания (8.2.4, 8.2.6 или карточку 3.4).

4. 9 КЛАСС. ТРИГОНОМЕТРИЯ, КООРДИНАТЫ И ВТОРАЯ ЧАСТЬ ОГЭ

Бош Клавдия Валерьевна,

учитель математики

МОБУ СОШ № 65 г. Сочи им. Героя Советского Союза Турчинского А.П.

В 9 классе подготовка к ОГЭ совмещается с последним этапом пропедевтики стереометрии: теоремы синусов и косинусов позволяют находить углы в гранях и сечениях многогранников, метод координат на плоскости готовит к координатному методу в пространстве, правильные многоугольники - основания правильных призм и пирамид. Отдельный блок посвящён заданиям 23–25 ОГЭ с полными решениями.

4.1. Блок «Решение треугольников в пространственных фигурах»

Методическое пояснение. *Зачем.* Угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, двугранный угол в 10 -11 классах в конечном счёте находятся из треугольника - чаще всего с помощью теоремы косинусов. Если ученик в 9 классе научится «видеть» нужный треугольник в модели, задание 14

перестанет казаться непосильным. *Как подать.* Обучающиеся работают с бумажными моделями правильной четырёхугольной пирамиды и правильного тетраэдра (шаблоны - приложение 2): отмечают на модели треугольник, обводят его цветом, затем строят выносной чертёж. Учитель использует приём «учитель ошибается»: «находит» прямой угол там, где его нет, а дети опровергают его вычислением. *На каком этапе.* После изучения теорем синусов и косинусов; на уроках обобщения и при подготовке к ОГЭ.

Уровень 1 «Я начинаю»

Задание 9.1.1. Стороны треугольника равны 5, 7 и 8. Найдите угол, лежащий против стороны 7. *Ответ:* $\cos\alpha = (25 + 64 - 49)/(2 \cdot 5 \cdot 8) = 40/80 = 1/2$, $\alpha = 60°$.

Задание 9.1.2. У правильной четырёхугольной пирамиды все рёбра равны 2. Найдите высоту боковой грани (апофему). *Ответ:* боковая грань - равносторонний треугольник со стороной 2, его высота $\sqrt{3}$.

Уровень 2 «Я умею»

Задание 9.1.3. В условиях задания 9.1.2 найдите высоту пирамиды и угол между боковым ребром и диагональю основания.

Ответ: половина диагонали основания равна $\sqrt{2}$; высота $\sqrt{(4 - 2)} = \sqrt{2}$; в прямоугольном треугольнике с гипотенузой 2 и равными катетами $\sqrt{2}$ острый угол равен 45°.

Задание 9.1.4. Все рёбра тетраэдра ABCD равны 6, M - середина ребра CD. Найдите косинус угла AMB.

Ответ: $AM = BM = 3\sqrt{3}$ (высоты равносторонних треугольников), $AB = 6$; $\cos\angle AMB = (27 + 27 - 36)/(2 \cdot 27) = 1/3$. В 10 классе выяснится, что $\angle AMB$ — линейный угол двугранного угла при ребре CD.

Уровень 3 «Я исследую»

Задание 9.1.5. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2, M - середина ребра BB_1. Найдите косинус угла AMC_1. Острый это угол или тупой?

Ответ: AM = $MC_1 = \sqrt{(4 + 1)} = \sqrt{5}$, $AC_1 = 2\sqrt{3}$; $\cos \angle AMC_1 = (5 + 5 - 12)/(2 \cdot 5) = -0{,}2$; угол тупой. Полезно обсудить с учениками, почему на модели этот угол «кажется» острым.

4.2. Блок «Координаты и векторы — шаг к координатному методу»

Методическое пояснение. *Зачем.* Координатный метод - один из двух основных способов решения задания 14 ЕГЭ; его «плоская» версия изучается в 9 классе. Здесь важно не только научить формулам, но и показать силу метода: громоздкое геометрическое рассуждение заменяется простым вычислением. *Как подать.* Каждую задачу полезно решить двумя способами - геометрически и в координатах - и обсудить в группах, какой удобнее (подготовка к «дуэли методов» в 11 классе). *На каком этапе.* После тем «Векторы» и «Метод координат»; задача 9.2.4 - на уроке обобщения или во внеурочной деятельности.

Уровень 1 «Я начинаю»

Задание 9.2.1. Найдите расстояние между точками A(1; 2) и B(4; 6) и координаты середины отрезка AB. *Ответ:* 5; (2,5; 4).

Уровень 2 «Я умею»

Задание 9.2.2. Напишите уравнение окружности с центром в точке (2; −1), проходящей через точку (5; 3). *Ответ:* радиус $\sqrt{(9 + 16)} = 5$; $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

Задание 9.2.3. Найдите угол между векторами a(3; 4) и b(4; −3). *Ответ:* скалярное произведение 12 − 12 = 0, угол 90°.

Уровень 3 «Я исследую»

Задание 9.2.4. ABCD - прямоугольник, M - произвольная точка плоскости. Докажите, что $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

Решение: введём систему координат: A(0; 0), B(a; 0), C(a; b), D(0; b), M(x; y). Тогда $MA^2 + MC^2 = x^2 + y^2 + (x - a)^2 + (y - b)^2$, $MB^2 + MD^2 = (x - a)^2 + y^2 + x^2 + (y - b)^2$ — выражения совпадают. *Продолжение для 11 класса:* утверждение верно и для точки M вне плоскости прямоугольника (достаточно добавить координату z).

4.3. Блок «Правильные многоугольники - основания призм и пирамид»

Методическое пояснение. *Зачем.* В задании 3 и задании 14 ЕГЭ постоянно встречаются правильные треугольные, четырёхугольные и шестиугольные призмы и пирамиды. Вершина правильной пирамиды проектируется в центр основания, поэтому радиусы вписанной и описанной окружностей — обязательный «словарь» будущего выпускника. *Как подать.* Ученики вырезают правильные многоугольники, находят центр перегибанием, измеряют радиусы и сравнивают с вычисленными значениями; затем «поднимают» вершину над центром, получая модель пирамиды. *На каком этапе.* При изучении темы «Правильные многоугольники»; задача 9.3.3 - как мост к 10 классу.

Уровень 1 «Я начинаю»

Задание 9.3.1. Сторона правильного шестиугольника равна 4. Найдите его большую и меньшую диагонали и площадь. *Ответ:* 8; $4\sqrt{3}$; $6 \cdot (\sqrt{3}/4) \cdot 16 = 24\sqrt{3}$.

Уровень 2 «Я умею»

Задание 9.3.2. Сторона правильного треугольника равна 6. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей. *Ответ:* высота $3\sqrt{3}$; $r = \sqrt{3}$ (одна треть высоты), $R = 2\sqrt{3}$ (две трети высоты).

Уровень 3 «Я исследую»

Задание 9.3.3. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6, боковое ребро равно 4. Найдите высоту пирамиды и угол между боковым ребром и плоскостью основания (в 9 классе - угол между боковым ребром и его проекцией - отрезком, соединяющим вершину основания с центром).

Ответ: вершина проектируется в центр основания, $R = 2\sqrt{3}$; высота $\sqrt{(16 - 12)} = 2$; $\cos \varphi = 2\sqrt{3}/4 = \sqrt{3}/2$, $\varphi = 30°$.

4.4. Блок «Задания 23–25 ОГЭ: полное решение»

Методическое пояснение. *Зачем.* Задания 23–25 ОГЭ проверяют умение решать планиметрические задачи с развёрнутым ответом; навык полной записи решения, сформированный здесь, напрямую переносится на задания 13-19 ЕГЭ.

Как подать. Решение сначала обсуждается в группе устно, затем каждый записывает его индивидуально; группы обмениваются работами и проверяют их по критериям (приложение 5, лист взаимопроверки). Учитель показывает образцы записи и подчёркивает, что любое верное и обоснованное решение засчитывается, даже если оно отличается от «эталонного». *На каком этапе.* Во втором полугодии 9 класса, на уроках повторения и консультациях.

Задание 9.4.1 *(тип задания 23).* Высота AH ромба ABCD делит сторону CD на отрезки DH = 12 и CH = 1. Найдите высоту ромба.

Решение: CD = DH + CH = 13; так как все стороны ромба равны, AD = 13. Треугольник ADH прямоугольный, $AH = \sqrt{(AD^2 - DH^2)} = \sqrt{(169 - 144)} = 5$. *Ответ:* 5.

Задание 9.4.2 *(тип задания 23).* Биссектриса угла A параллелограмма ABCD пересекает сторону BC в точке K, BK = 7, KC = 3. Найдите периметр параллелограмма.

Решение: ∠BAK = ∠KAD (AK - биссектриса), ∠KAD = ∠AKB (накрест лежащие при AD ∥ BC). Значит, ∠BAK = ∠AKB, треугольник ABK равнобедренный, AB = BK = 7. BC = 10, периметр $2 \cdot (7 + 10) = 34$. *Ответ:* 34.

Задание 9.4.3 *(тип задания 24).* Точка M - середина стороны BC параллелограмма ABCD, причём AM = MD. Докажите, что ABCD - прямоугольник.

Решение: треугольники ABM и DCM равны по трём сторонам: AB = DC (противоположные стороны параллелограмма), BM = CM (M - середина BC), AM = DM (по условию). Значит, ∠ABM = ∠DCM. Но ∠B + ∠C = 180° (односторонние углы при AB ∥ DC), поэтому ∠B = ∠C = 90°. Параллелограмм с прямым углом — прямоугольник, что и требовалось доказать.

Задание 9.4.4 *(тип задания 25).* Диагонали трапеции ABCD с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC и AOD равны 4 и 9. Найдите площадь трапеции (рисунок 7).

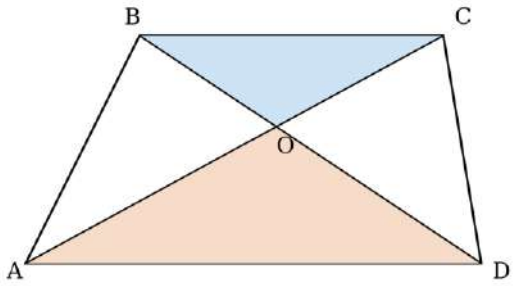


Рисунок 7. Трапеция к заданию 9.4.4

Решение: треугольники BOC и DOA подобны (углы при вершине O вертикальные, ∠OBC = ∠ODA как накрест лежащие); отношение площадей 4 : 9, значит коэффициент подобия 2 : 3 и BO : OD = CO : OA = 2 : 3. Треугольники AOB и AOD имеют общую высоту из вершины A, поэтому S(AOB) : S(AOD) = BO : OD = 2 : 3, S(AOB) = 6. Аналогично S(COD) : S(BOC) = OD : OB = 3 : 2, S(COD) = 6. Площадь трапеции 4 + 9 + 6 + 6 = 25. *Ответ:* 25.

Стереометрическое продолжение (для обсуждения): такая трапеция может оказаться сечением пирамиды или боковой гранью усечённой пирамиды; отношение 2 : 3 тогда будет коэффициентом подобия оснований.

4.5. Разноуровневая карточка «Каждый может». 9 класс

Фролова Виктория Викторовна,

учитель математики

МОБУ СОШ № 65 г. Сочи им. Героя Советского Союза Турчинского А.П.

Методическое пояснение. Карточка применяется на уроке обобщения по теме «Соотношения между сторонами и углами треугольника» и на консультациях к ОГЭ. Уровень «Я исследую» содержит задачу формата задания 25 ОГЭ; ученику, выбравшему этот уровень, разрешается воспользоваться «подсказкой в конверте» без снижения оценки - это часть договора о поддержке.

Таблица 8. Карточка «Каждый может» для 9 класса

Уровень	Задания	Ответы
«Я начинаю»	1) Сторона правильного треугольника равна 6. Найдите его высоту. 2) Найдите площадь правильного шестиугольника со стороной 2.	1) $3\sqrt{3}$ 2) $6\sqrt{3}$

Уровень	Задания	Ответы
«Я умею»	1) Стороны треугольника равны 3, 5 и 7. Найдите его наибольший угол. 2) В треугольнике сторона равна 6, а противолежащий ей угол — 30°. Найдите радиус описанной окружности.	1) 120° 2) 6
«Я исследую»	1) Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6, высота равна 2. Найдите боковое ребро. 2) Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC перпендикулярны, BC = 6, AC = 8. Найдите AB.	1) 4 2) $2\sqrt{5}$

Подсказка в конверте к заданию 2 уровня «Я исследую»: пусть M — точка пересечения медиан, $MA_1 = x$, $MB_1 = y$; тогда $AM = 2x$, $BM = 2y$. Из прямоугольных треугольников BMA_1 и AMB_1: $4y^2 + x^2 = 9$, $4x^2 + y^2 = 16$; складывая, получаем $5(x^2 + y^2) = 25$, $x^2 + y^2 = 5$, $AB^2 = 4x^2 + 4y^2 = 20$, $AB = 2\sqrt{5}$.

4.6. Сценарий занятия «Экспедиция к пирамиде» (9 класс)

Бош Клавдия Валерьевна,

учитель математики

Колганова Елена Петровна,

учитель математики

МОБУ СОШ № 65 г. Сочи им. Героя Советского Союза Турчинского А.П.

Тип занятия: урок обобщения и систематизации знаний (квест). **Продолжительность:** 45 минут. **Оборудование:** бумажные модели правильной четырёхугольной пирамиды и правильного тетраэдра, четыре «станции» с конвертами заданий, маршрутные листы (приложение 5), лист самооценки.

Цель: обобщить применение теорем Пифагора, синусов и косинусов, свойств правильных многоугольников к вычислениям в пространственных фигурах; отработать оформление заданий 23–25 ОГЭ.

Игровой элемент «Экспедиция к пирамиде»:

– *Дидактическая задача:* применить изученные теоремы к нахождению элементов пирамид и к решению заданий ОГЭ.

– *Игровая задача:* экспедиция должна пройти четыре станции и собрать «ключ» - четыре числа, сумма которых открывает «тайник» с посланием.

– *Игровые действия:* команды движутся по станциям «Основание» (задание 9.3.2), «Апофема» (задание 9.1.3), «Тайна угла» (задание 9.1.4), «Архив ОГЭ» (задание 9.4.2); на каждой станции решают задачу, проверяют ответ у «хранителя» (ученик-консультант или учитель) и получают часть ключа.

– *Правила:* на станции работает вся команда, ответ сдаёт тот, кого выбирает хранитель; можно один раз взять «подсказку проводника» без потери очков; команда, пришедшая к тайнику первой, помогает остальным, а не завершает игру.

– *Результат:* «ключ» - сумма целочисленных ответов станций (для игры вопросы формулируются так, чтобы ответ был целым): «Основание» - квадрат радиуса описанной окружности, $R^2 = 12$; «Апофема» - квадрат высоты пирамиды, $h^2 = 2$; «Тайна угла» — число, обратное косинусу угла AMB, т. е. 3; «Архив ОГЭ» - периметр, 34. Код тайника: 12 + 2 + 3 + 34 = 51. В тайнике - письмо выпускника-«проводника» о том, как ему помогла подготовка с 7 класса (письмо пишут выпускники прошлых лет по просьбе учителя); каждый участник отмечает своё продвижение в маршрутном листе.

Таблица 9. Ход занятия «Экспедиция к пирамиде»

Этап	Время	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся
Вводная (мотивационная) часть	5 мин	Рассказывает о пирамиде Хеопса и о том, как древние египтяне определяли её высоту; объявляет экспедицию, раздаёт маршрутные листы.	Распределяют роли (конструктор, чертёжник, контролёр, спикер), выбирают порядок станций.
Основная (деятельностная) часть	30 мин	Наблюдает за работой, выступает «проводником» по запросу команд, фиксирует продвижение в маршрутных листах.	Решают задачи станций, выполняют выносные чертежи, проверяют решения друг друга, оформляют задание 9.4.2 по критериям ОГЭ.
Заключительная часть (рефлексия)	10 мин	Открывает тайник; предлагает каждому завершить фразы «Я смог…», «Мне помог…», «Я помог…»; предлагает задания для дома трёх уровней.	Заполняют лист самооценки, отмечают продвижение на карте роста, выбирают уровень домашнего задания.

5. 10 КЛАСС. СЕЧЕНИЯ, ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ, УГЛЫ

Колганова Елена Петровна,

учитель математики

МОБУ СОШ № 65 г. Сочи им. Героя Советского Союза Турчинского А.П.

Обучающиеся, прошедшие пропедевтику 7–9 классов, приходят в 10 класс с опытом работы с моделями и сечениями куба и с привычкой к выносным чертежам и групповой работе. Задача раздела - перевести этот опыт на язык аксиом и теорем: строить сечения методом следов, доказывать параллельность и перпендикулярность, находить углы. Задания уровней 1–2 соответствуют заданию 3 ЕГЭ, уровня 3 и блок 5.3 - заданию 14. Основная форма работы - «стереометрическая мастерская» (п. 1.5.2) с взаимопроверкой по листу из приложения 5.

5.1. Блок «Аксиомы стереометрии и построение сечений»

Методическое пояснение. *Зачем.* Построение сечения - первый шаг большинства решений задания 14: от правильности чертежа зависит весь дальнейший ход решения. Метод следов опирается на аксиомы и следствия из них, поэтому каждый шаг построения должен быть обоснован («точки X и K лежат в плоскости грани и в плоскости сечения, значит…»). *Как подать.* Учитель сначала показывает сечение на модели (вспоминая опыт 7–8 классов), затем на динамической модели в GeoGebra, после чего каждый ученик строит сечение на шаблоне (приложение 3). Рекомендация ФИПИ 2026 года: динамическая модель полезна для выдвижения гипотезы, но затем нужно отрабатывать самостоятельный анализ конструкции по собственному чертежу ученика. *На каком этапе.* Темы «Аксиомы стереометрии», «Параллельность прямых и плоскостей», «Тетраэдр и параллелепипед»; задания уровня 3 - в мастерских во втором полугодии.

Уровень 1 «Я начинаю»

Задание 10.1.1. Сколько плоскостей проходит через три точки, не лежащие на одной прямой? через прямую и не лежащую на ней точку? через две

пересекающиеся прямые? *Ответ:* по одной в каждом случае (аксиома и её следствия).

Задание 10.1.2. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 3 плоскостью, проходящей через точки A, C и C_1. Определите вид сечения и найдите его площадь. *Ответ:* прямоугольник AA_1C_1C со сторонами 3 и $3\sqrt{2}$; площадь $9\sqrt{2}$.

Уровень 2 «Я умею»

Задание 10.1.3. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 6, M - середина ребра AA_1. Постройте сечение куба плоскостью MB_1D_1 и найдите его площадь.

Ответ: сечение - треугольник MB_1D_1; $MB_1 = MD_1 = \sqrt{(36 + 9)} = 3\sqrt{5}$, $B_1D_1 = 6\sqrt{2}$. Медиана MO_1 (O_1 - центр грани $A_1B_1C_1D_1$) является высотой: $MO_1 = \sqrt{(A_1O_1^2 + A_1M^2)} = \sqrt{(18 + 9)} = 3\sqrt{3}$. Площадь $(1/2) \cdot 6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{6}$.

Уровень 3 «Я исследую»

Задание 10.1.4. Точки P и Q - середины рёбер AB и AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение куба плоскостью PQC_1 и найдите, в каком отношении оно делит ребро BB_1 (рисунок 8).

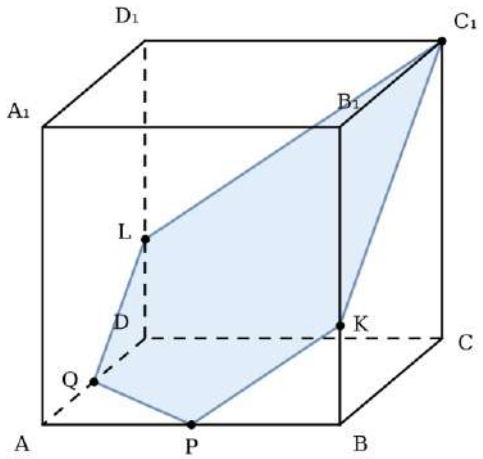


Рисунок 8. Сечение куба плоскостью PQC_1 - пятиугольник

Построение и решение: прямая PQ лежит в плоскости основания; продолжим её до пересечения с прямыми BC и DC в точках X и Y. Точки X и C_1 лежат в плоскости грани BB_1C_1C, прямая XC_1 пересекает ребро BB_1 в точке K; аналогично прямая YC_1 пересекает DD_1 в точке L. Сечение - пятиугольник PKC_1LQ. Пусть ребро равно a. Треугольник XBP прямоугольный и

равнобедренный (∠BPX = ∠APQ = 45° как вертикальные), поэтому XB = BP = a/2, XC = 3a/2. Из подобия треугольников XBK и XCC₁: BK = CC₁ · XB/XC = a/3. *Ответ:* BK : KB₁ = 1 : 2.

5.2. Блок «Параллельность и перпендикулярность. Углы в пространстве»

Методическое пояснение. *Зачем.* Угол между скрещивающимися прямыми, угол между прямой и плоскостью, двугранный угол и теорема о трёх перпендикулярах - основной содержательный материал пункта б) задания 14 и многих прототипов задания 3. *Как подать.* Используется приём «от 7 класса к 10-му»: учитель напоминает задачу 7.3.4 о равностороннем треугольнике AB₁C, и ученики сами «открывают» способ нахождения угла между скрещивающимися прямыми через параллельный перенос. Каждое решение записывается по схеме «построить — обосновать — вычислить»: в группе контролёр следит за тем, чтобы каждый шаг был обоснован. *На каком этапе.* Темы «Перпендикулярность прямых и плоскостей», «Углы в пространстве»; задачи уровня 1 - для устной работы и подготовки к заданию 3 в течение всего 10–11 класса.

Уровень 1 «Я начинаю»

Задание 10.2.1. В кубе ABCDA₁B₁C₁D₁ найдите угол между прямыми AB₁ и BC₁.

Ответ: AB₁ ∥ DC₁, поэтому искомый угол равен углу между DC₁ и BC₁; треугольник BC₁D равносторонний (стороны - диагонали граней), угол 60°.

Задание 10.2.2. В прямоугольном параллелепипеде ABCDA₁B₁C₁D₁ известно, что AB = 3, AD = 4, AA₁ = 10. Найдите тангенс угла между прямой AC₁ и плоскостью ABC. *Ответ:* проекция AC₁ на плоскость основания - AC = 5, tg φ = CC₁/AC = 10/5 = 2.

Задание 10.2.3. В правильной четырёхугольной призме ABCDA₁B₁C₁D₁ сторона основания равна 2, боковое ребро равно 1. Найдите диагональ BD₁. *Ответ:* √(4 + 4 + 1) = 3.

Уровень 2 «Я умею»

Задание 10.2.4. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD сторона основания равна 6, высота равна 4. Найдите апофему, площадь боковой поверхности и тангенс угла между боковой гранью и плоскостью основания.

Ответ: апофема $\sqrt{(4^2 + 3^2)} = 5$; площадь боковой поверхности $4 \cdot (1/2) \cdot 6 \cdot 5 = 60$; $\operatorname{tg} \varphi = 4/3$.

Задание 10.2.5. Докажите, что в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямые B_1D и AC перпендикулярны.

Решение: $AC \perp BD$ (диагонали квадрата), $AC \perp BB_1$ (BB_1 перпендикулярна плоскости основания). Значит, AC перпендикулярна плоскости BB_1D_1D, содержащей B_1D, и, следовательно, $AC \perp B_1D$. (Другой способ — теорема о трёх перпендикулярах: BD - проекция наклонной B_1D на плоскость основания, $AC \perp BD$.)

Уровень 3 «Я исследую»

Задание 10.2.6 *(в формате задания 14).* Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны 2, M - середина ребра AA_1, H - середина ребра BC.

а) Докажите, что прямая BC перпендикулярна плоскости AMH.

б) Найдите угол между плоскостями MBC и ABC.

Решение. а) $AH \perp BC$ как медиана равностороннего треугольника ABC; $MA \perp BC$, так как MA перпендикулярна плоскости основания. Прямая BC перпендикулярна двум пересекающимся прямым AH и AM плоскости AMH, значит, перпендикулярна этой плоскости.

б) Из пункта а) следует, что $MH \perp BC$ и $AH \perp BC$, поэтому $\angle MHA$ - линейный угол двугранного угла между плоскостями MBC и ABC. В прямоугольном треугольнике MAH: $MA = 1$, $AH = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} \angle MHA = 1/\sqrt{3}$, $\angle MHA = 30°$. *Ответ:* б) 30°.

5.3. Блок «Задание 14: первое полное решение»

Методическое пояснение. *Зачем.* К концу 10 класса обучающиеся должны уметь записывать полное решение задачи с развёрнутым ответом: доказательство пункта а) и обоснованное вычисление в пункте б). Мы начинаем с задачи на сечение куба, потому что куб - самый «обжитой» объект сквозной

линии. *Как подать.* Задача решается в мастерской: каждая группа решает пункт б) своим способом (через трапецию или через площадь проекции), затем спикеры групп сравнивают решения. Перед записью решения учитель знакомит обучающихся с критериями оценивания (таблица 10), а взаимопроверка проводится именно по ним. *На каком этапе.* Конец 10 класса - начало 11 класса, уроки обобщения по теме «Перпендикулярность. Углы».

Задание 10.3.1. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4. Точка M - середина ребра BB_1, точка N - середина ребра B_1C_1.

а) Докажите, что сечение куба плоскостью AMD_1 - трапеция $AMND_1$.

б) Найдите площадь этого сечения.

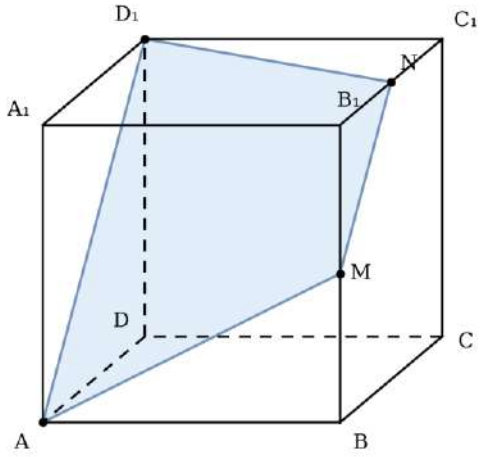


Рисунок 9. Сечение куба плоскостью AMD_1 к заданию 10.3.1

Решение. а) MN - средняя линия треугольника BB_1C_1, поэтому $MN \parallel BC_1$ и $MN = BC_1/2$. Четырёхугольник ABC_1D_1 - прямоугольник ($AB \parallel D_1C_1$ и $AB = D_1C_1$, $AB \perp BC_1$), поэтому $BC_1 \parallel AD_1$ и $BC_1 = AD_1$. Значит, $MN \parallel AD_1$, а прямые MN и AD_1 задают одну плоскость, которая и есть плоскость AMD_1; она пересекает грани куба по отрезкам AM, MN, ND_1 и D_1A. Поскольку $MN = AD_1/2 \neq AD_1$, четырёхугольник $AMND_1$ - трапеция (рисунок 9).

б) $AD_1 = 4\sqrt{2}$, $MN = 2\sqrt{2}$, $AM = \sqrt{(16 + 4)} = 2\sqrt{5}$, $D_1N = \sqrt{(16 + 4)} = 2\sqrt{5}$ — трапеция равнобедренная. Её высота $h = \sqrt{(AM^2 - ((AD_1 - MN)/2)^2)} = \sqrt{(20 - 2)} = 3\sqrt{2}$. Площадь $S = (4\sqrt{2} + 2\sqrt{2})/2 \cdot 3\sqrt{2} = 18$.

Таблица 10. Критерии оценивания задания 14 (в изложении авторов по материалам ФИПИ; актуальная формулировка - в демонстрационном варианте 2026 г.)

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте б), ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а), и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а), ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0

5.4. Разноуровневая карточка «Каждый может». 10 класс

Фролова Виктория Викторовна,

учитель математики

МОБУ СОШ № 65 г. Сочи им. Героя Советского Союза Турчинского А.П.

Методическое пояснение. Карточка используется как тематическая самостоятельная работа по выбору. Уровни «Я начинаю» и «Я умею» соответствуют заданию 3 ЕГЭ и доступны обучающимся, сдающим базовый уровень; уровень «Я исследую» готовит к пункту б) задания 14. Ученик вправе выполнить задания разных уровней — итоговая оценка учитывает самый высокий освоенный уровень.

Таблица 11. Карточка «Каждый может» для 10 класса

Уровень	Задания	Ответы
«Я начинаю»	1) Сколько плоскостей проходит через прямую и не лежащую на ней точку? 2) Найдите угол между прямыми AA_1 и CD в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$.	1) одна 2) 90°
«Я умею»	1) Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4. Найдите расстояние между прямыми AA_1 и CC_1. 2) В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 6, боковое ребро равно 5. Найдите площадь боковой поверхности.	1) $4\sqrt{2}$ 2) 48
«Я исследую»	1) Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2. Найдите площадь сечения куба плоскостью ACD_1. 2) Найдите угол между прямыми AB_1 и A_1C_1 в кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$.	1) $2\sqrt{3}$ 2) 60°

5.5. Сценарий занятия «Стереометрическая мастерская: заказ архитектора» (10 класс)

Тип занятия: урок-мастерская (комплексное применение знаний). **Продолжительность:** 45 минут (возможен сдвоенный урок). **Оборудование:** шаблоны изображений куба (приложение 3), модели кубов, листы для групповой работы и листы взаимопроверки (приложение 5), компьютер с GeoGebra для финальной проверки, лист самооценки.

Цель: обучающиеся строят сечения куба методом следов, обосновывают построение с опорой на аксиомы, определяют вид сечения и вычисляют отношения, в которых сечение делит рёбра.

Игровой элемент «Заказ архитектора»:

– *Дидактическая задача:* освоить построение сечений куба методом следов и обоснование каждого шага построения.

– *Игровая задача:* архитектурное бюро проектирует стеклянный павильон в форме куба; заказчик хочет, чтобы декоративная стеклянная перегородка проходила через три заданные точки на рёбрах; бюро должно выдать чертёж перегородки и указать, где её крепить на рёбрах.

– *Игровые действия:* каждая группа получает свой «заказ» (одну из задач 10.1.2–10.1.4 или аналогичную с другими точками), строит сечение, оформляет «паспорт перегородки» (вид многоугольника, точки крепления, отношения отрезков), передаёт его «экспертному совету» - соседней группе.

– *Правила:* каждый шаг построения сопровождается обоснованием (без обоснования «паспорт» не принимается); экспертный совет обязан сначала назвать сильные стороны работы и только затем замечания; роли в группе фиксированы на всё занятие и меняются на следующем.

– *Результат:* набор «паспортов перегородок» (выставка решений), проверенных экспертами; общий вывод класса об алгоритме метода следов; проверка построений на динамической модели.

Таблица 12. Ход занятия «Стереометрическая мастерская: заказ архитектора»

Этап	Время	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся
Вводная (мотивационная) часть	7 мин	Показывает фотографии зданий со стеклянными гранями; напоминает «аукцион сечений» 8 класса; выдаёт заказы и роли.	Вспоминают, какие сечения куба возможны; распределяют роли, читают заказ.
Основная (деятельностная) часть	28 мин	Консультирует группы по запросу; задаёт вопросы-подсказки («Какая точка лежит сразу в двух плоскостях?»); организует обмен паспортами.	Строят сечение, обосновывают шаги, вычисляют отношения; проводят экспертизу работы соседней группы по листу взаимопроверки.
Заключительная часть (рефлексия)	10 мин	Демонстрирует построения в GeoGebra; формулирует вместе с классом алгоритм метода следов; предлагает задания трёх уровней для дома.	Сверяют построения с динамической моделью; заполняют лист самооценки; выбирают уровень задания (карточка 5.4).

6. 11 КЛАСС. ОБЪЁМЫ, ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ, КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД, ЗАДАНИЕ 14

Колганова Елена Петровна,

учитель математики

МОБУ СОШ № 65 г. Сочи им. Героя Советского Союза Турчинского А.П.

В 11 классе сквозная линия завершается: объёмы многогранников и тел вращения (основной материал задания 3 ЕГЭ), координатно-векторный метод и полное решение задания 14. Принципиальная позиция автора раздела: выпускник, готовящийся к профильному экзамену, владеет **двумя** методами решения задания 14 - классическим, который развивает пространственное мышление и часто даёт короткое решение, и координатным, надёжным и алгоритмичным. Сравнение методов организуется в форме командной «дуэли методов».

6.1. Блок «Объёмы и тела вращения»

Методическое пояснение. *Зачем.* Задание 3 ЕГЭ чаще всего проверяет вычисление объёмов и площадей поверхностей, в том числе в практических ситуациях (уровень жидкости в сосуде, комбинации тел). *Как подать.* Через эксперимент: переливание воды из цилиндра в конус с теми же основанием и высотой (три конуса заполняют цилиндр), погружение детали в мерный сосуд. Историческая минутка - шар, вписанный в цилиндр, на надгробии Архимеда (п. 1.3). В группах обучающиеся составляют собственные задачи-прототипы задания 3 и обмениваются ими. *На каком этапе.* Темы «Объёмы тел», «Тела вращения»; задания уровня 1- в устной работе до конца учебного года.

Уровень 1 «Я начинаю»

Задание 11.1.1. Радиус основания цилиндра равен 3, высота равна 5. Найдите объём цилиндра, делённый на π. *Ответ:* 45.

Задание 11.1.2. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём цилиндра равен 27. Найдите объём конуса. *Ответ:* 9.

Задание 11.1.3. Объём куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 12. Найдите объём треугольной пирамиды $ABCB_1$. *Ответ:* $(1/3) \cdot (1/2) \cdot a^2 \cdot a = a^3/6 = 2$.

Уровень 2 «Я умею»

Задание 11.1.4. Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 36. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Ответ: площадь поверхности шара $4\pi r^2 = 36$; площадь полной поверхности цилиндра $2\pi r^2 + 2\pi r \cdot 2r = 6\pi r^2 = 1{,}5 \cdot 36 = 54$.

Задание 11.1.5. В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 48 см. На какой высоте будет уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, радиус основания которого в 2 раза больше? *Ответ:* площадь основания больше в 4 раза, высота меньше в 4 раза: 12 см.

Задание 11.1.6. Объём треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен 18. Найдите объём пирамиды B_1ABC. *Ответ:* пирамида и призма имеют общее основание и равные высоты: 18 : 3 = 6.

Уровень 3 «Я исследую»

Задание 11.1.7 *(задача Архимеда).* Шар вписан в цилиндр. Объём цилиндра равен 33. Найдите объём шара. Докажите, что площадь поверхности шара составляет 2/3 площади полной поверхности цилиндра.

Ответ: $V(\text{шара}) = (4/3)\pi r^3$, $V(\text{цилиндра}) = \pi r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$, отношение 2/3; объём шара 22. Площади: $4\pi r^2$ и $6\pi r^2$, отношение 2/3.

Задание 11.1.8. Объём конуса равен 32. Через середину высоты параллельно основанию проведено сечение, являющееся основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объём меньшего конуса и объём оставшейся части (усечённого конуса).

Ответ: коэффициент подобия 1/2, отношение объёмов 1/8: объём меньшего конуса 4, усечённого конуса 28. Связь с задачей 8.2.5 (сечение пирамиды через середины рёбер).

6.2. Блок «Координатный метод»

Методическое пояснение. *Зачем.* Координатный метод позволяет находить углы и расстояния в пространстве по единому алгоритму: ввести систему координат, найти координаты нужных точек, векторов и нормалей, применить формулу. *Как подать.* Каждая формула выводится как обобщение плоской формулы 9 класса (расстояние между точками, скалярное произведение, уравнение окружности → уравнение сферы и плоскости). Опорный конспект в стиле В.Ф. Шаталова (таблица 13) каждый ученик заполняет сам и использует до экзамена. В группах роль «чертёжника» при координатном методе — выбор удобной системы координат. *На каком этапе.* Тема «Координаты и векторы в пространстве»; затем - во всех задачах на углы и расстояния.

Таблица 13. Опорный конспект «Координатный метод в пространстве»

Что находим	Формула
Расстояние между точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$	$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
Угол φ между прямыми с направляющими векторами a и b	$\cos\varphi = \lvert a \cdot b \rvert / (\lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert)$
Угол φ между прямой (вектор a) и плоскостью (нормаль n)	$\sin\varphi = \lvert a \cdot n \rvert / (\lvert a \rvert \cdot \lvert n \rvert)$
Угол φ между плоскостями с нормалями n_1 и n_2	$\cos\varphi = \lvert n_1 \cdot n_2 \rvert / (\lvert n_1 \rvert \cdot \lvert n_2 \rvert)$

Что находим	Формула
Расстояние от точки $M(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $ax + by + cz + d = 0$	$\rho = \lvert ax_0 + by_0 + cz_0 + d\rvert / \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$
Расстояние между скрещивающимися прямыми (точки A, B на прямых, векторы u, v)	$\rho = \lvert AB \cdot (u \times v)\rvert / \lvert u \times v\rvert$ или через плоскость, содержащую одну прямую и параллельную другой

Уровень 1 «Я начинаю»

Задание 11.2.1. Найдите расстояние между точками A(1; 2; −1) и B(3; −1; 5). *Ответ:* $\sqrt{(4 + 9 + 36)} = 7$.

Задание 11.2.2. Найдите косинус угла между векторами a(1; 2; 2) и b(2; −1; 2). *Ответ:* $a \cdot b = 2 - 2 + 4 = 4$, $|a| = |b| = 3$, $\cos\varphi = 4/9$.

Уровень 2 «Я умею»

Задание 11.2.3. Найдите расстояние от точки M(1; 1; 1) до плоскости $2x - y + 2z - 9 = 0$. *Ответ:* $|2 - 1 + 2 - 9| / 3 = 2$.

Задание 11.2.4. Решите задачу 10.2.1 (угол между прямыми AB_1 и BC_1 в кубе) координатным методом.

Ответ: при ребре 1: A(0; 0; 0), B(1; 0; 0), $B_1(1; 0; 1)$, $C_1(1; 1; 1)$; $AB_1(1; 0; 1)$, $BC_1(0; 1; 1)$; $\cos\varphi = 1/(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = 1/2$, $\varphi = 60°$. Ответ совпадает с найденным классически - обсуждаем, какой способ быстрее.

Задание 11.2.5. Завершите второй способ решения задачи 10.3.1: составьте уравнение плоскости AMD_1 и найдите косинус угла между этой плоскостью и плоскостью ABC.

Ответ: A(0; 0; 0), M(4; 0; 2), $D_1(0; 4; 4)$ (ось Ox - AB, ось Oy - AD, ось Oz - AA_1). Плоскость $ax + by + cz = 0$ проходит через A; из условий $4a + 2c = 0$ и $4b + 4c = 0$ получаем n(1; 2; −2), плоскость $x + 2y - 2z = 0$. Нормаль основания (0; 0; 1), $\cos\varphi = 2/3$.

Уровень 3 «Я исследую»

Задание 11.2.6. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

Ответ: $u = AB_1(1; 0; 1)$, $v = BC_1(0; 1; 1)$, $u \times v = (-1; -1; 1)$, $|u \times v| = \sqrt{3}$; вектор AB(1; 0; 0), $|AB \cdot (u \times v)| = 1$; $\rho = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$. Без векторного произведения:

плоскость, проходящая через BC_1 параллельно AB_1, имеет нормаль, перпендикулярную u и v, например n(1; 1; −1); её уравнение x + y − z − 1 = 0 (проходит через B), расстояние от A до неё $|-1|/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$.

6.3. Блок «Задание 14: два метода решения»

Методическое пояснение. *Зачем.* Это вершина сквозной линии: полное решение задачи с развёрнутым ответом. *Как подать.* Каждая задача решается в форме «дуэли методов» (сценарий 6.5): одна группа решает классически, другая — координатным методом, затем группы меняются решениями, проверяют их по критериям (таблица 10) и обсуждают достоинства каждого способа. Учитель подчёркивает: на экзамене засчитывается любое верное обоснованное решение. *На каком этапе.* Второе полугодие 11 класса; повторно - на итоговых консультациях.

Задание 11.3.1. В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD все рёбра равны 2. Точка M - середина ребра SC.

а) Докажите, что прямая SC перпендикулярна плоскости BMD.

б) Найдите угол между прямой AM и плоскостью BMD.

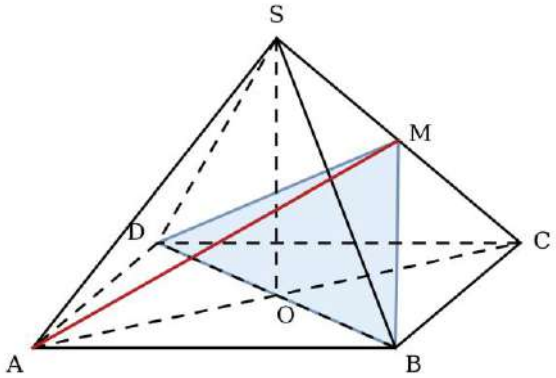


Рисунок 10. Правильная пирамида SABCD и плоскость BMD к заданию 11.3.1

Классическое решение. а) Боковые грани пирамиды - равносторонние треугольники со стороной 2. BM - медиана равностороннего треугольника SBC, значит, BM ⊥ SC; аналогично DM ⊥ SC (треугольник SDC). Прямая SC перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости BMD, следовательно, SC ⊥ (BMD).

б) Пусть O - центр основания (точка пересечения AC и BD). Плоскость BMD содержит точку O, середину отрезка AC, поэтому точки A и C равноудалены от этой плоскости. По пункту а) CM ⊥ (BMD), значит, расстояние от C до плоскости равно CM = 1; следовательно, и расстояние от A до плоскости BMD равно 1. В треугольнике ASC: SA = SC = 2, AC = 2√2, $SA^2 + SC^2 = AC^2$, поэтому ∠ASC = 90°. Тогда AM = √($SA^2 + SM^2$) = √(4 + 1) = √5. Так как M лежит в плоскости BMD, синус искомого угла φ равен отношению расстояния от A до плоскости к длине AM: sin φ = 1/√5, откуда tg φ = 1/2.

Решение методом координат. Введём систему координат с началом в центре основания O: A(−1; −1; 0), B(1; −1; 0), C(1; 1; 0), D(−1; 1; 0); из SA = 2 получаем высоту SO = √(4 − 2) = √2, S(0; 0; √2), M(1/2; 1/2; √2/2).

а) SC(1; 1; −√2), MB(1/2; −3/2; −√2/2), MD(−3/2; 1/2; −√2/2). SC · MB = 1/2 − 3/2 + 1 = 0, SC · MD = −3/2 + 1/2 + 1 = 0. Вектор SC перпендикулярен двум неколлинеарным векторам плоскости BMD, значит, SC ⊥ (BMD).

б) По пункту а) n = SC(1; 1; −√2) — нормаль плоскости BMD, |n| = 2. AM(3/2; 3/2; √2/2), |AM| = √(9/4 + 9/4 + 1/2) = √5. sin φ = |AM · n| / (|AM| · |n|) = |3/2 + 3/2 − 1| / (2√5) = 1/√5.

Ответ: б) arcsin(√5/5) = arctg(1/2).

Задание 11.3.2. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 6. Точка M - середина ребра AB, точка N - середина ребра B_1C_1.

а) Докажите, что прямые MN и A_1C перпендикулярны.

б) Найдите угол между прямой MN и плоскостью ABC.

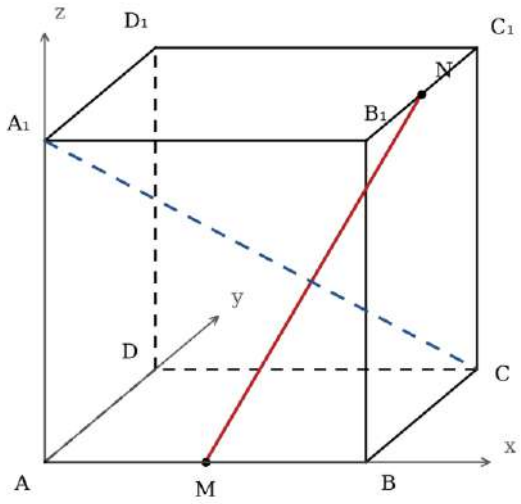


Рисунок 11. Куб с системой координат к заданию 11.3.2 (MN - сплошная красная, A_1C - штриховая синяя)

Классическое решение. а) Вычислим расстояния от точек M и N до концов отрезка A_1C. Из прямоугольных треугольников: $MA_1 = \sqrt{(AA_1^2 + AM^2)} = \sqrt{(36 + 9)} = \sqrt{45}$, $MC = \sqrt{(BC^2 + BM^2)} = \sqrt{(36 + 9)} = \sqrt{45}$; $NA_1 = \sqrt{(A_1B_1^2 + B_1N^2)} = \sqrt{(36 + 9)} = \sqrt{45}$, $NC = \sqrt{(CC_1^2 + C_1N^2)} = \sqrt{(36 + 9)} = \sqrt{45}$. Каждая из точек M и N равноудалена от концов отрезка A_1C, а множество таких точек пространства - плоскость, проходящая через середину A_1C перпендикулярно ему. Значит, прямая MN лежит в этой плоскости и $MN \perp A_1C$.

б) Пусть N′ - середина BC; $NN' \parallel BB_1$, поэтому $NN' \perp (ABC)$, и MN′ - проекция MN на плоскость основания. NN′ = 6, MN′ - средняя линия треугольника ABC, $MN' = AC/2 = 3\sqrt{2}$. $\operatorname{tg} \angle NMN' = 6/(3\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

Решение методом координат.. A(0; 0; 0), B(6; 0; 0), D(0; 6; 0), A_1(0; 0; 6); тогда C(6; 6; 0), M(3; 0; 0), N(6; 3; 6).

а) MN(3; 3; 6), A_1C(6; 6; −6), $MN \cdot A_1C = 18 + 18 - 36 = 0$, значит, $MN \perp A_1C$.

б) Нормаль к плоскости ABC — n(0; 0; 1). $\sin\varphi = 6/\sqrt{(9 + 9 + 36)} = 6/(3\sqrt{6}) = \sqrt{6}/3$, $\cos\varphi = \sqrt{(1 - 6/9)} = \sqrt{3}/3$, $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{2}$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Методический комментарий. В задаче 11.3.1 классическое решение пункта б) короче, но требует идеи (симметрия точек A и C относительно плоскости). В задаче 11.3.2 решение методом координат пункта а) занимает одну

строку, а классическое опирается на красивый, но неочевидный факт о плоскости равноудалённых точек. Обсуждение этих наблюдений в группах помогает каждому выпускнику выбрать «свой» метод.

6.4. Разноуровневая карточка «Каждый может». 11 класс

Фролова Виктория Викторовна,

учитель математики

МОБУ СОШ № 65 г. Сочи им. Героя Советского Союза Турчинского А.П.

Методическое пояснение. Карточка используется на итоговом повторении. Уровень «Я начинаю» доступен каждому выпускнику и гарантирует решение задания 3 ЕГЭ; уровень «Я исследую» содержит элементы пункта б) задания 14. Перед выполнением ученик отмечает в карте роста ожидаемый уровень, после выполнения - достигнутый; расхождение обсуждается с учителем индивидуально и доброжелательно.

Таблица 14. Карточка «Каждый может» для 11 класса

Уровень	Задания	Ответы
«Я начинаю»	1) Радиус основания цилиндра 2, высота 3. Найдите объём цилиндра, делённый на π. 2) Найдите объём шара радиуса 3, делённый на π.	1) 12 2) 36
«Я умею»	1) Найдите косинус угла между векторами a(2; 1; 2) и b(1; 0; 0). 2) Найдите расстояние от начала координат до плоскости x + 2y + 2z = 6.	1) 2/3 2) 2
«Я исследую»	1) Образующая конуса равна 10, радиус основания 6. Найдите объём конуса, делённый на π. 2) Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2. Найдите расстояние между прямыми AA_1 и BD.	1) 96 2) √2

6.5. Сценарий занятия «Дуэль методов» (11 класс)

Тип занятия: урок комплексного применения знаний (практикум по решению задания 14). **Продолжительность:** 45 минут (рекомендуется сдвоенный урок). **Оборудование:** раздаточный материал с условием задачи 11.3.1 (или 11.3.2), опорный конспект (таблица 13), критерии оценивания (таблица 10), листы взаимопроверки (приложение 5), лист самооценки.

Цель: обучающиеся решают задание 14 двумя методами, сравнивают их и оценивают решения по критериям ФИПИ.

Игровой элемент «Дуэль методов»:

– *Дидактическая задача:* закрепить классический и координатный методы нахождения угла между прямой и плоскостью; научить оценивать решение по критериям.

– *Игровая задача:* две «школы» - «Классики» и «Координатники» - спорят, чей метод лучше; спор разрешает жюри, оценивающее полноту, обоснованность и изящество решения.

– *Игровые действия:* класс делится на 4 группы (по две на каждый метод); группы решают одну и ту же задачу своим методом, оформляют решение на листе для групповой работы, обмениваются решениями с группой другой «школы», проверяют его по критериям, а затем каждая группа пытается решить задачу «чужим» методом.

– *Правила:* решение оценивается только по критериям ФИПИ; проверяющая группа сначала отмечает сильные стороны решения; защищает решение ученик, выбранный жребием; победителей в дуэли нет - итогом становится общий вывод о том, когда какой метод удобнее.

– *Результат:* два полных решения задачи, проверенных по критериям; таблица «Плюсы и минусы методов», составленная классом; индивидуальный выбор каждым выпускником приоритетного метода.

Таблица 15. Ход занятия «Дуэль методов»

Этап	Время	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся
Вводная (мотивационная) часть	5 мин	Напоминает путь от кубиков 7 класса до задания 14; объявляет дуэль; распределяет группы так, чтобы в каждой были ученики разного уровня.	Распределяют роли; повторяют опорный конспект; оценивают свою готовность по шкале от 1 до 5.
Основная (деятельностная) часть	30 мин	Консультирует группы, следит за обоснованностью шагов; организует обмен	Решают задачу своим методом, оформляют решение, проверяют решение другой группы по критериям, пробуют «чужой» метод.

Этап	Время	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся
		решениями и взаимопроверку.	
Заключительная часть (рефлексия)	10 мин	Подводит итог без определения победителя; вместе с классом составляет таблицу плюсов и минусов методов; предлагает домашнее задание трёх уровней (карточка 6.4 или задача 11.3.2).	Повторно оценивают готовность по шкале от 1 до 5, сравнивают с началом урока; заполняют лист самооценки; выбирают уровень домашнего задания.

7. ДИАГНОСТИКА И ТРАЕКТОРИЯ «КАЖДЫЙ МОЖЕТ»

Фролова Виктория Викторовна,

учитель математики

МОБУ СОШ № 65 г. Сочи им. Героя Советского Союза Турчинского А.П.

7.1. Подходы к диагностике

Диагностика в нашей системе выполняет поддерживающую, а не контролирующую функцию: её цель - увидеть, на какой ступени находится ученик, и договориться с ним о следующем шаге. Результаты не обсуждаются публично и не используются для сравнения обучающихся; ученик получает содержательный комментарий о сформированных умениях и рекомендуемом уровне. Диагностика проводится в начале и в конце учебного года и на «стыках» сквозной линии (таблица 16); уровни заданий совпадают с уровнями карточек «Каждый может».

Таблица 16. Система диагностики сквозной линии

Класс	Срок и форма	Что проверяется	Как используются результаты
7	Сентябрь, май; мини-работа «Я вижу пространство» (п. 7.4)	Распознавание развёрток, счёт элементов, представление о сечениях на моделях	Комплектование групп с учётом разного уровня; выбор стартового уровня карточек
8	Май; тематическая карточка 3.4 как диагностическая	Теорема Пифагора в пространственных конфигурациях	Планирование повторения в 9 классе

Класс	Срок и форма	Что проверяется	Как используются результаты
9	Декабрь, апрель; варианты в формате ОГЭ (задания 23–25)	Решение и оформление геометрических задач второй части ОГЭ	Индивидуальные консультации, подбор задач уровня
9→10	Май 9 класса или сентябрь 10 класса; работа «Пространственный старт» (п. 7.3)	Готовность к систематическому курсу стереометрии	Передача результатов учителю 10 класса; стартовые роли в группах
10	Май; задача в формате задания 14 (п. 5.3)	Построение сечений, обоснование, пункт а) задания 14	Выбор приоритетного метода на 11 класс
11	Декабрь, март; задания 3 и 14 в формате ЕГЭ	Готовность к экзамену	Индивидуальная траектория итогового повторения

7.2. Критерии уровней и траектория

Результат диагностической работы переводится не в отметку, а в один из трёх уровней, каждый из которых сопровождается рекомендацией (таблица 17). Принципиально важно, что формулировки рекомендаций утвердительные и указывают на следующий шаг, а не на дефицит.

Таблица 17. Уровни освоения и рекомендации траектории «Каждый может»

Уровень	Признаки	Рекомендация ученику и учителю
«Я начинаю»	Верно выполнены задания уровня 1; задания уровней 2–3 не начаты или содержат ошибки	Работа с моделями и выносными чертежами; карточки уровня 1 с постепенным добавлением одного задания уровня 2; роль «чертёжника» в группе с поддержкой партнёра
«Я умею»	Верно выполнены задания уровней 1 и 2; в заданиях уровня 3 есть продвижение	Регулярные задачи уровня 2 и одна задача уровня 3 в неделю; роль «конструктора» или «контролёра»; запись полных решений
«Я исследую»	Верно выполнены задания всех уровней, в том числе с обоснованием	Задачи в формате задания 14 и олимпиадные задачи; роль консультанта или «спикера»; составление собственных задач для одноклассников

Переход на следующий уровень фиксируется на карте роста (приложение 6) и обязательно отмечается учителем словесно - это одна из важнейших

ситуаций успеха. Если ученик пока остаётся на прежнем уровне, учитель вместе с ним выбирает одно конкретное умение, над которым он будет работать до следующей диагностики.

7.3. Диагностическая работа «Пространственный старт» (переход из 9 в 10 класс)

Методическое пояснение. Работа рассчитана на 30 минут и выполняется индивидуально; модели кубов разрешено использовать. Задания 1–2 относятся к уровню «Я начинаю», 3–4 - к уровню «Я умею», 5–6 - к уровню «Я исследую». Ученик может выполнять задания в любом порядке.

Таблица 18. Задания диагностической работы «Пространственный старт» и ответы

№	Задание	Ответ
1	Сколько рёбер у треугольной призмы?	9
2	Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда с измерениями 2, 3 и 6.	7
3	Окрашенный куб распилили на 27 одинаковых кубиков. Сколько кубиков имеют ровно две окрашенные грани?	12
4	Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 8, высота равна 3. Найдите апофему.	5
5	Ребро куба равно 2. Найдите площадь сечения, проходящего через середины трёх рёбер, выходящих из одной вершины.	$\sqrt{3}/2$
6	Может ли сечение куба быть правильным пятиугольником? Ответ обоснуйте.	Нет (обоснование: у пятиугольного сечения есть параллельные стороны, лежащие в противоположных гранях, а у правильного пятиугольника параллельных сторон нет)

Пояснения к заданиям 4–5: 4) апофема - гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 3 (высота) и 4 (половина стороны основания), $\sqrt{(9 + 16)} = 5$; 5) сечение - равносторонний треугольник со стороной $\sqrt{2}$ (гипотенуза треугольника с катетами 1 и 1), его площадь $(\sqrt{3}/4) \cdot 2 = \sqrt{3}/2$.

7.4. Мини-работа «Я вижу пространство» (7 класс)

Методическое пояснение. Работа выполняется за 15 минут в начале и в конце учебного года; сравнение двух результатов показывает каждому ученику его собственный рост. Для учеников, которым трудно работать «в уме», разрешаются бумажные модели - цель работы не проверить, а увидеть.

Таблица 19. Задания мини-работы «Я вижу пространство» и ответы

№	Задание	Ответ
1	Сколько вершин у куба? у треугольной пирамиды?	8; 4
2	Является ли развёрткой куба фигура из четырёх квадратов в ряд и двух квадратов, приставленных к второму квадрату сверху и снизу?	Да
3	Какой фигурой может быть поверхность воды в кубе, стоящем на грани?	Квадрат
4	Сколько кубиков с ребром 1 см помещается в коробку 2 см × 3 см × 5 см?	30
5	Может ли сечение куба быть шестиугольником?	Да

ОТВЕТЫ

Раздел 2. 7 класс

7.1.1. 6 граней, 12 рёбер, 8 вершин; $8 - 12 + 6 = 2$, равенство выполняется.

7.1.2. а) и в).

7.1.3. 36 см; 54 см².

7.1.4. B и D; A и C; E и F.

7.1.5. C — 4, F — 2, на гранях B и D — 1 и 6 (в любом порядке).

7.1.6. 11.

7.1.7. ≈ 6,7 см (точно $3\sqrt{5}$ см); таких путей 6.

7.1.8. из квадрата 3 × 3 — нельзя; из прямоугольника 2 × 5 — можно.

7.2.1. 24; 64.

7.2.2. 9 кубиков; вид спереди — столбики высотой 3, 1 и 2.

7.2.3. три грани — 8, две — 12, одна — 6, ни одной — 1.

7.2.4. 125 см³.

7.2.5. 8; 24; 24; 8 (в общем случае 8; $12(n-2)$; $6(n-2)^2$; $(n-2)^3$).

7.2.6. 4 кубика.

7.3.1. квадрат; прямоугольник.

7.3.2. параллельны BB_1, CC_1, DD_1; пересекают под прямым углом AB, AD, A_1B_1, A_1D_1.

7.3.3. да, в обоих случаях.

7.3.4. все углы равны 60°.

7.3.5. нет (не более шести сторон).

7.3.6. равносторонний треугольник.

Карточка 2.4. «Я начинаю»: 1) 6; 2) 27 см³. «Я умею»: 1) 4 см; 2) 96 см². «Я исследую»: 1) у всех 8; 2) 125 см³.

Раздел 3. 8 класс

8.1.1. $5\sqrt{2}$.

8.1.2. 5; 13.

8.1.3. площадь поверхности 216, объём 216.

8.1.4. $\sqrt{6}$.

8.1.5. 3.

8.1.6. $3\sqrt{5}$ см.

8.1.7. $\sqrt{74}$.

8.2.1. 52.

8.2.2. $2\sqrt{2}$.

8.2.3. $2\sqrt{3}$.

8.2.4. $8\sqrt{2}$.

8.2.5. 9.

8.2.6. $12\sqrt{3}$.

8.3.1. 13.

8.3.2. доказательство приведено в тексте.

8.3.3. 39.

Карточка 3.4. «Я начинаю»: 1) 10; 2) $7\sqrt{2}$. «Я умею»: 1) $2\sqrt{3}$; 2) 7. «Я исследую»: 1) 162; 2) 6.

Раздел 4. 9 класс

9.1.1. 60°.

9.1.2. $\sqrt{3}$.

9.1.3. 45°.

9.1.4. $\cos \angle AMB = 1/3$.

9.1.5. $\cos \angle AMC_1 = -0{,}2$; угол тупой.

9.2.1. 5; (2,5; 4).

9.2.2. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$.

9.2.3. 90°.

9.2.4. доказательство приведено в тексте.

9.3.1. 8; $4\sqrt{3}$; $24\sqrt{3}$.

9.3.2. $r = \sqrt{3}$, $R = 2\sqrt{3}$.

9.3.3. 30°.

9.4.1. 5.

9.4.2. 34.

9.4.3. доказательство приведено в тексте.

9.4.4. 25.

Карточка 4.5. «Я начинаю»: 1) $3\sqrt{3}$; 2) $6\sqrt{3}$. «Я умею»: 1) 120°; 2) 6. «Я исследую»: 1) 4; 2) $2\sqrt{5}$.

Раздел 5. 10 класс

10.1.1. одна плоскость в каждом случае.

10.1.2. $9\sqrt{2}$.

10.1.3. $9\sqrt{6}$.

10.1.4. $BK : KB_1 = 1 : 2$.

10.2.1. 60°.

10.2.2. $\operatorname{tg}\varphi = 2$.

10.2.3. 3.

10.2.4. 60; $\operatorname{tg}\varphi = 4/3$.

10.2.5. доказательство приведено в тексте.

10.2.6. б) 30°.

10.3.1. б) 18.

Карточка 5.4. «Я начинаю»: 1) одна; 2) 90°. «Я умею»: 1) $4\sqrt{2}$; 2) 48. «Я исследую»: 1) $2\sqrt{3}$; 2) 60°.

Раздел 6. 11 класс

11.1.1. 45.

11.1.2. 9.

11.1.3. 2.

11.1.4. 54.

11.1.5. 12 см.

11.1.6. 6.

11.1.7. 22.

11.1.8. 4; 28.

11.2.1. 7.

11.2.2. $\cos\varphi = 4/9$.

11.2.3. 2.

11.2.4. 60°.

11.2.5. $x + 2y - 2z = 0$; $\cos\varphi = 2/3$.

11.2.6. $\sqrt{3}/3$.

11.3.1. б) $\arcsin(\sqrt{5}/5) = \operatorname{arctg}(1/2)$.

11.3.2. б) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Карточка 6.4. «Я начинаю»: 1) 12; 2) 36. «Я умею»: 1) 2/3; 2) 2. «Я исследую»: 1) 96; 2) $\sqrt{2}$.

Раздел 7. Диагностика

Работа «Пространственный старт» (п. 7.3). 1) 9; 2) 7; 3) 12; 4) 5; 5) $\sqrt{3}/2$; 6) нет.

Мини-работа «Я вижу пространство» (п. 7.4). 1) 8; 4; 2) да; 3) квадрат; 4) 30; 5) да.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНТЕРНЕТ-ИСТОЧНИКОВ

Нормативные документы и материалы ФИПИ

1. Федеральная образовательная программа основного общего образования: утверждена приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 18.05.2023 № 370.

2. Федеральная образовательная программа среднего общего образования: утверждена приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 18.05.2023 № 371.

3. Федеральная рабочая программа основного общего образования «Математика» (базовый уровень); федеральная рабочая программа среднего общего образования «Математика» (базовый и углублённый уровни). — URL: https://edsoo.ru (дата обращения: 24.10.2026).

4. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2026 году единого государственного экзамена по математике. Профильный уровень / ФИПИ. — URL: https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory (дата обращения: 24.10.2026).

5. Демонстрационный вариант, спецификация и кодификатор КИМ ОГЭ 2026 года по математике / ФИПИ. — URL: https://fipi.ru/oge/demoversii-specifikacii-kodifikatory (дата обращения: 24.10.2026).

6. Методические рекомендации для учителей по математике (ЕГЭ, 2026) / ФИПИ. — URL: https://doc.fipi.ru/ege/analiticheskie-i-metodicheskie-materialy/2026/ma_mr_2026.pdf (дата обращения: 24.10.2026).

7. Методические рекомендации обучающимся по организации самостоятельной подготовки к ЕГЭ 2026 года. Математика / ФИПИ. — URL: https://doc.fipi.ru/navigator-podgotovki/navigator-ege/MR_matematika_ege_2026.pdf (дата обращения: 24.10.2026).

8. Открытый банк заданий ЕГЭ и ОГЭ по математике / ФИПИ. — URL: https://fipi.ru/ege/otkrytyy-bank-zadaniy-ege ; https://fipi.ru/oge/otkrytyy-bank-zadaniy-oge (дата обращения: 24.10.2026).

Учебники и учебные пособия

9. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Математика. Геометрия. 7–9 классы. Базовый уровень: учебник. — М.: Просвещение (издания, входящие в федеральный перечень учебников).

10. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10–11 классы. Базовый и углублённый уровни: учебник. — М.: Просвещение (издания, входящие в федеральный перечень учебников).

11. Погорелов А.В. Геометрия. 7–9 классы: учебник. — М.: Просвещение.

12. Погорелов А.В. Геометрия. 10–11 классы: учебник. — М.: Просвещение.

13. Шарыгин И.Ф., Ерганжиева Л.Н. Наглядная геометрия. 5–6 классы: учебное пособие. — М.: Дрофа.

14. Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф. Задачи по стереометрии. — М.: Наука, 1989.

15. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. Типовые экзаменационные варианты / под ред. И.В. Ященко. — М.: Национальное образование (ежегодное издание).

Педагогика и психология

16. Белкин А.С. Ситуация успеха. Как её создать: книга для учителя. — М.: Просвещение, 1991.

17. Дьяченко В.К. Сотрудничество в обучении: о коллективном способе учебной работы. — М.: Просвещение, 1991.

18. Лысенкова С.Н. Когда легко учиться. — М.: Педагогика.

19. Шаталов В.Ф. Куда и как исчезли тройки. — М.: Педагогика, 1979.

20. Педагогика сотрудничества: отчёт о встрече учителей-экспериментаторов // Учительская газета. — 1986. — 18 октября.

Интернет-ресурсы

21. Федеральный институт педагогических измерений (ФИПИ): официальный сайт. — URL: https://fipi.ru (дата обращения: 24.10.2026).

22. Единое содержание общего образования: портал. — URL: https://edsoo.ru (дата обращения: 24.10.2026).

23. ФГИС «Моя школа». — URL: https://myschool.edu.ru (дата обращения: 24.10.2026).
24. GeoGebra: динамическая математика (3D-калькулятор). — URL: https://www.geogebra.org/3d (дата обращения: 24.10.2026).
25. Образовательный портал «Решу ЕГЭ» (математика, профильный уровень). — URL: https://math-ege.sdamgia.ru (дата обращения: 24.10.2026).

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1. Развёртки куба

Каталог всех одиннадцати развёрток куба используется в сценарии «Мастерская развёрток» (п. 2.5) для проверки результатов групп и для заданий 7.1.6 и 7.1.8. Рекомендуется распечатать приложение в увеличенном масштабе на плотной бумаге, вырезать развёртки и склеить кубы (клапаны для склейки обучающиеся дорисовывают самостоятельно).

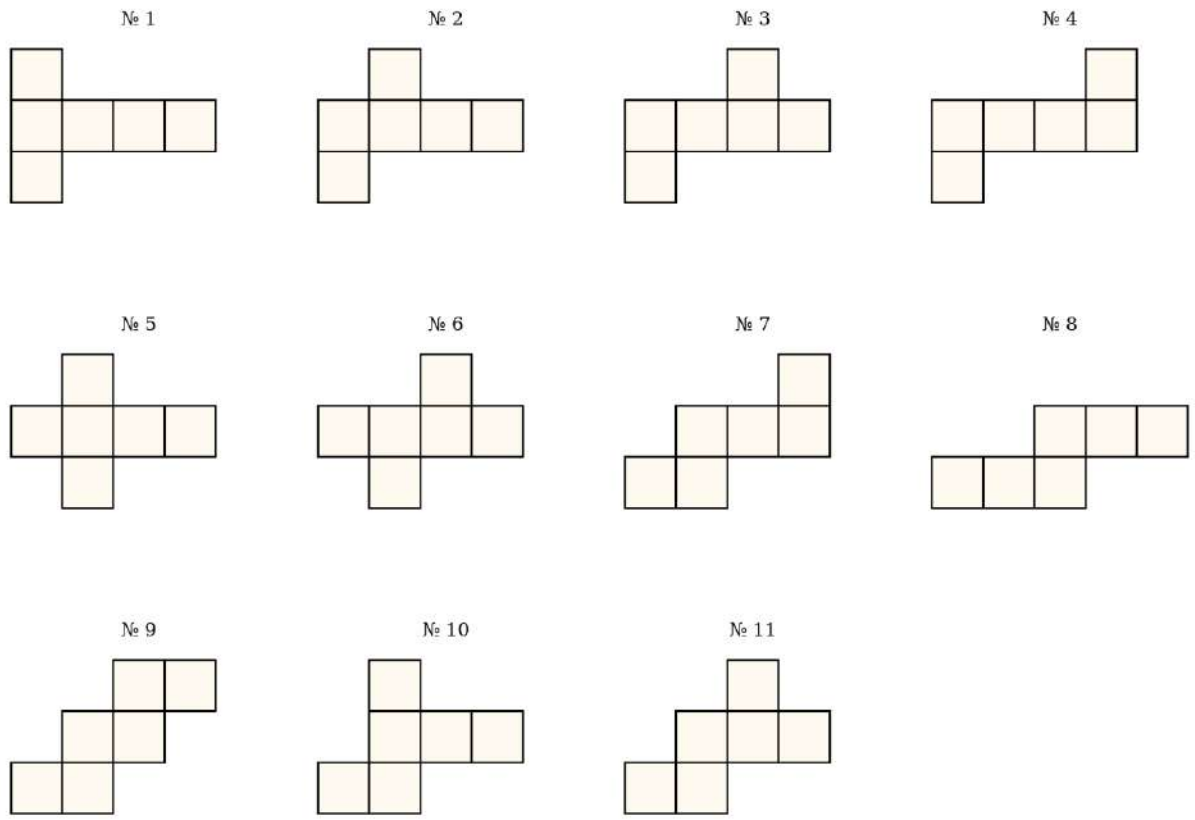


Рисунок 12. Все одиннадцать развёрток куба

Приложение 2. Шаблоны моделей многогранников

Шаблоны используются в 9 классе (блоки 4.1 и 4.3, сценарий «Экспедиция к пирамиде») и в 10 классе. Перед печатью шаблон увеличивают до нужного размера; серые участки со штриховым контуром — клапаны для склейки. Для призмы клапаны на треугольных основаниях обучающиеся дорисовывают самостоятельно.

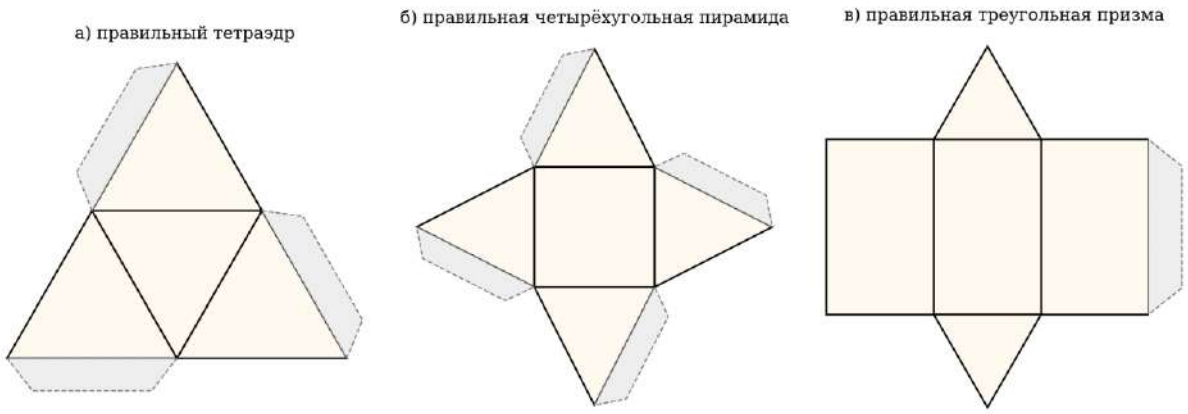


Рисунок 13. Шаблоны развёрток правильного тетраэдра, правильной четырёхугольной пирамиды и правильной треугольной призмы

Приложение 3. Шаблоны изображений куба для построения сечений

Лист используется в сценариях «Аукцион сечений» (8 класс) и «Заказ архитектора» (10 класс), а также при выполнении заданий 10.1.2–10.1.4. На каждом изображении куба обучающийся отмечает заданные точки и строит сечение; невидимые рёбра уже изображены штриховыми линиями.

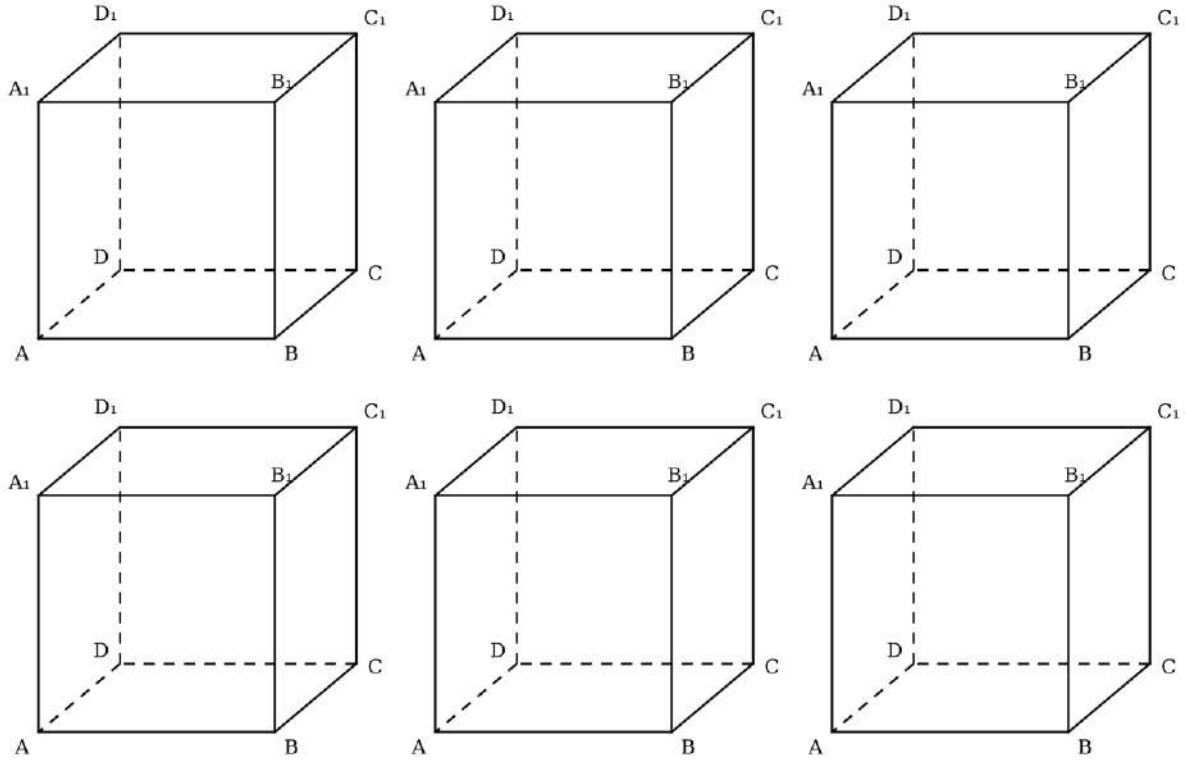


Рисунок 14. Шаблоны изображений куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ для построения сечений

Приложение 4. Лист самооценки

Лист самооценки заполняется в заключительной части каждого занятия. Ученик сравнивает себя только с собой; учитель читает листы и оставляет короткий доброжелательный комментарий.

Фамилия, имя: _____ Класс: _____ Дата: _____

Тема занятия: _____

Таблица 20. Лист самооценки обучающегося

Утверждение	Да	Частично	Пока нет
Я понял(а), что мы сегодня изучали			
Я могу выполнить задание уровня «Я начинаю»			
Я могу выполнить задание уровня «Я умею»			
Я попробовал(а) задание уровня «Я исследую»			
Я могу объяснить решение однокласснику			
Я внёс(ла) вклад в работу группы			
Я не побоялся(ась) ошибиться и исправил(а) ошибку			

Сегодня я научился(ась): _____

Мне было трудно: _____

Я помог(ла) группе тем, что: _____

На следующем занятии я выбираю уровень: «Я начинаю» / «Я умею» / «Я исследую»

Комментарий учителя: _____

Приложение 5. Листы для групповой работы

5.1. Карточка ролей в группе. Карточка лежит на столе каждой группы; роли меняются от занятия к занятию.

Таблица 21. Роли в группе и их обязанности

Роль	Обязанности	Фраза-помощник
Конструктор	Предлагает план решения, следит, чтобы группа двигалась к цели	«Что нам дано и что нужно найти? Какой первый шаг?»
Чертёжник	Выполняет чертёж или модель, следит за правильностью изображения (видимые и невидимые линии), строит выносные чертежи	«Давайте вынесем этот треугольник отдельно»
Контролёр	Проверяет обоснование каждого шага, сверяет решение с критериями	«Почему это так? На какую теорему мы опираемся?»
Спикер	Представляет решение классу, отвечает на вопросы, передаёт замечания экспертов группе	«Наша группа предлагает…, мы опирались на…»

5.2. Лист групповой работы «Стереометрическая мастерская».

Группа: __ Конструктор: __ Чертёжник: __ Контролёр: __ Спикер: _

Таблица 22. Лист групповой работы «Стереометрическая мастерская»

Этап	Запись группы
Заказ (условие задачи)	
Чертёж (построение сечения, выносной чертёж)	
План решения	
Обоснования (какие теоремы используем)	
Вычисления	
Ответ	
Что было самым трудным и как мы с этим справились	

5.3. Лист взаимопроверки.

Группа-автор: _____ Группа-эксперт: _____ Задача: _____

Таблица 23. Лист взаимопроверки (по образцу критериев ФИПИ)

Критерий	Да / нет	Комментарий экспертов
Сильные стороны решения (заполняется первым)	—	
Чертёж выполнен верно, видимые и невидимые линии различаются		
Пункт а): утверждение доказано, все шаги обоснованы		
Пункт б): построение искомого элемента (угла, расстояния, сечения) обосновано		
Пункт б): вычисления выполнены верно		
Ответ записан		
Предварительная оценка по критериям задания 14 (0–3 балла)		

5.4. Маршрутный лист «Экспедиция к пирамиде» (9 класс).

Таблица 24. Маршрутный лист команды

Станция	Задача	Ответ	Отметка хранителя / подсказка использована
«Основание»	Квадрат радиуса описанной окружности правильного треугольника со стороной 6		
«Апофема»	Квадрат высоты правильной четырёхугольной пирамиды со всеми рёбрами 2		
«Тайна угла»	Число, обратное косинусу угла AMB в правильном тетраэдре (задание 9.1.4)		
«Архив ОГЭ»	Периметр параллелограмма (задание 9.4.2)		
Код тайника	Сумма ответов		

Приложение 6. Карта роста «Каждый может»

Карта ведётся обучающимся в течение учебного года (образец для 8 класса). В клетке ставится дата, когда уровень освоен; учитель подтверждает продвижение подписью или наклейкой. Пустая клетка означает не «неудачу», а следующий шаг.

Фамилия, имя: _____ Класс: _____ Учебный год: _____

Таблица 25. Карта роста обучающегося (8 класс)

Тема (блок сборника)	«Я начинаю»	«Я умею»	«Я исследую»
3.1. Теорема Пифагора в кубе и параллелепипеде			
3.2. Площади и подобие: сечения на моделях			
3.3. От планиметрии 8 класса к ОГЭ			
Карточка «Каждый может» (п. 3.4)			
Сценарий «Аукцион сечений»: мой вклад в группу			
Итоговая диагностика года			

Моя цель на следующую четверть: _____

Что мне поможет: _____