Муниципальное общеобразовательное бюджетное учреждение
средняя общеобразовательная школа № 10 г. Сочи
имени атамана С.И. Белого

СБОРНИК ДИДАКТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА «ТЕХНОЛОГИЯ ПОДВОДЯЩИХ ЗАДАЧ. ГЕОМЕТРИЯ. СТЕРЕОМЕТРИЯ»

Составитель сборника дидактического материала:
Боклаг Валентина Николаевна,
учитель математики СОШ №10, тьютор

Сочи
2023

Пояснительная записка

Данный сборник дидактического материала предназначен для учителей математики, работающих в 10-11 классах общеобразовательных организаций.

Задания, представленные в сборнике, подобраны на основе технологии подводящих задач. В сборнике присутствует необходимый краткий теоретический материал (определения, понятия, свойства), разбор типовых заданий, задания для самостоятельного решения и ответы. Все задания расположены в порядке повышения уровня: от простого к сложному. Отличительной особенностью сборника является то, что для решения каждой последующей задачи учащимся необходимо опираться на предыдущую.

Пособие предназначено для обобщающего повторения и подготовки к итоговой аттестации в форме ЕГЭ по математике.

Данное пособие поможет учителю математики организовать работу обучающихся на уроке закрепления или обобщения изученного материала по геометрии, а также для контроля уровня усвоения определенной темы.

Выпускникам общеобразовательных организаций пособие поможет самостоятельно повторить, закрепить проблемные темы и проверить свой результат.

Данный дидактический материал включен в сборник материалов тьюторов «Технология подводящих задач при подготовке к итоговой аттестации», составленный кафедрой математики, информатики и технологического образования ГБОУ ИРО Краснодарского края.

5.1 Расстояния

Расстояние между двумя точками. Расстояние между точками A и B можно вычислить:

1) как длину отрезка AB, если отрезок AB удается включить в некоторый треугольник в качестве одной из его сторон;
2) по формуле $\mathrm{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, где $\mathrm{A}((x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$ или по теореме Пифагора (пространственной), как диагональ прямоугольного параллелепипеда
   $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, где *a, b, c* измерения прямоугольного параллелепипеда.

Расстояние от точки до прямой. *Расстояние от точки до прямой*, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, проведенного из этой точки на прямую. Расстояние от точки до прямой можно вычислить, как длину отрезка перпендикуляра, если удается включить этот отрезок в некоторый треугольник в качестве одной из высот. При этом если длины сторон треугольника все разные a, b, c (треугольник не равносторонний и не равнобедренный), то высоту треугольника, например, к стороне a можно искать по следующему алгоритму:

1) по теореме косинусов находим косинус угла между сторонами a и b;
2) зная косинус этого угла, используя основное тригонометрическое тождество, найти его синус;
3) синус найденного угла есть отношение искомой высоты к стороне b.
4) в прямоугольном треугольнике высота к гипотенузе равна произведению катетов, деленному на гипотенузу.

Расстояние между двумя параллельными прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра. Расстояние между двумя параллельными прямыми равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до другой прямой.

Расстояние от точки до плоскости. Расстояние от точки до плоскости, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость. Расстояние от точки M до плоскости α:

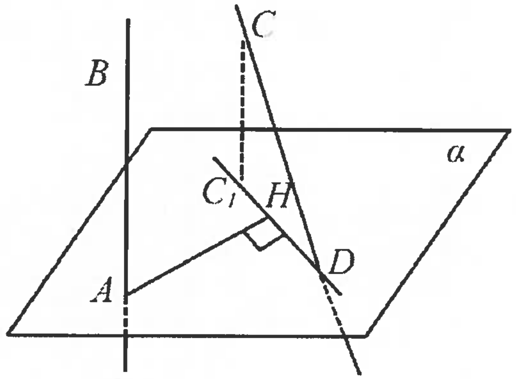
1) равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки P, лежащей на прямой l, которая проходит через точку M и параллельна плоскости α;
2) равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки P, лежащей на плоскости β, которая проходит через точку M и параллельна плоскости α.

Метод объемов: Если объем пирамиды $ABCS$ равен V_{ABCS}, то расстояние от точки S до плоскости ABC можно найти используя формулу объема пирамиды: $V_{ABCS} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot H$, где H – расстояние от точки S до плоскости ABC.

Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно длине их общего перпендикуляра, которое равно расстоянию между точкой одной из этих плоскостей и другой плоскостью.

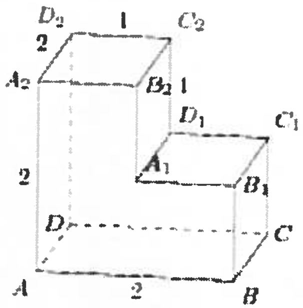
Расстояние между скрещивающимися прямыми. *Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми* равно длине отрезка их общего перпендикуляра. Для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми можно воспользоваться одним из приведенных ниже четырех способов.

1) Построить общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых (отрезок с концами на этих прямых и перпендикулярный обеим) и найти его длину.
2) Построить плоскость, содержащую одну из прямых и параллельную второй. Тогда искомое расстояние будет равно расстоянию от какой-нибудь точки второй прямой до построенной плоскости.
3) Заключить данные прямые в параллельные плоскости, проходящие через данные скрещивающиеся прямые, и найти расстояние между этими плоскостями.
4) Построить плоскость α, перпендикулярную одной из данных прямых AB, и построить на этой плоскости ортогональную проекцию C_1D второй прямой CD. Тогда искомое расстояние это расстояние от точки A до прямой C_1D, т.е. длина отрезка AH.



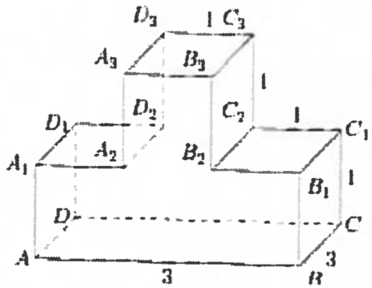
<table>
<tr><th>Вариант 1</th><th>Вариант 2</th><th>Вариант 3</th></tr>
<tr>
<td>

1. Все двугранные углы многогранника, изображенного на рисунке прямые.
Найдите расстояние:
а) между вершинами A и C_2;
б) от вершины D_2 до прямой C_1B_1;
в) между прямыми AD и B_1C_1;
г) от вершины В до плоскости $(A_2B_2C_2)$;
д) между плоскостями (ADD_2)и (BCC_1);
е) между прямыми АС и BB_1.



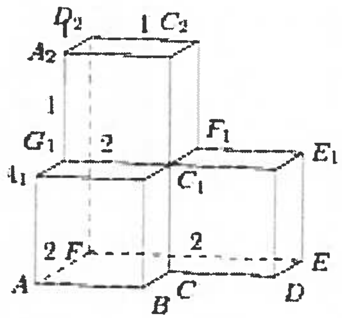
</td>
<td>

1. Все двугранные углы многогранника, изображенного на рисунке прямые.
Найдите квадрат расстояния:
а) между вершинами A и C_2;
б) от вершины D_2 до прямой C_1B_1;
в) между прямыми AD и B_1C_1;
г) от вершины В до плоскости $(A_2B_2C_2)$;
д) между плоскостями (ADD_1) и (BCC_1);
е) между прямыми АС и BB_1.



</td>
<td>

1. Все двугранные углы многогранника, изображенного на рисунке прямые. Найдите расстояние:
а) между вершинами A и C_1;
б) от вершины D_2 до прямой ВС;
в) между прямыми АВ и FE;
г) от вершины В до плоскости $(A_2D_2C_2)$;
д) между плоскостями (AFE) и $(A_2D_2C_2)$;
е) между прямыми АЕ и FD_2.



</td>
</tr>
<tr>
<td>

2. Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – ромб $ABCD$, в котором AB=10, $AC = 6\sqrt{7}$. Боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{21}$. Найдите расстояние от вершины B до прямой AC_1.

</td>
<td>

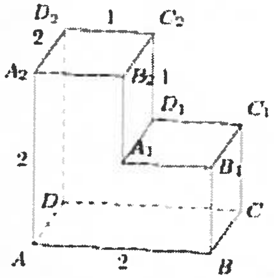
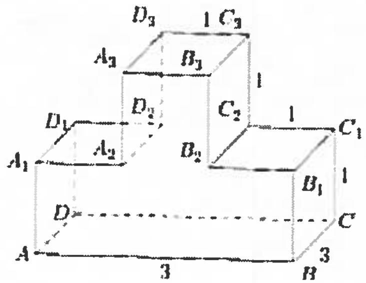
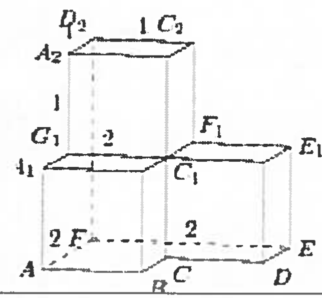
2. Ребро AD пирамиды $DABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC. Найдите расстояние от вершины A до плоскости, проходящей через середины ребер AB, AC и AD, если $AD = 2\sqrt{5}$, $AB = AC$ =10, BC =4 $\sqrt{5}$.

</td>
<td>

2. На продолжении ребра SK за точку K правильной четырехугольной пирамиды $SKLMN$ с вершиной S взята точка A так, что расстояние от точки A до плоскости MNS равно 24. Найдите длину отрезка KA, если $SL = 2\sqrt{41}$, MN =16.

</td>
</tr>
</table>

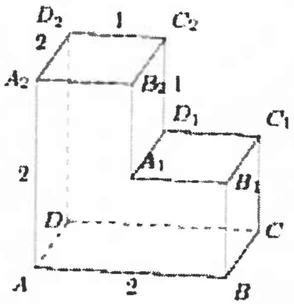
3. В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со стороной $AB = 4$ и диагональю $BD = 7$. Все боковые ребра пирамиды равны 4. На диагонали BD основания $ABCD$ отмечена точка E, а на ребре AS – точка F так, что $SF = BE = 3$. Плоскость CEF параллельна ребру SB и пересекает ребро SD в точке Q. Найдите расстояние от точки Q до плоскости ABC.	**3.** На ребрах CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причем $DP = 4$, $B_1Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке М. Точка M является серединой ребра CC_1. Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ.	**3.** В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, $AC = 4$, $BC = 16$, $AA_1 = 4\sqrt{2}$. Точка Q – середина ребра A_1B_1, а точка P делит ребро B_1C_1 в отношении $1 : 2$, считая от вершины C_1. Точка M является серединой ребра CC_1. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости APQ.

Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6
1. Все двугранные углы многогранника, изображенного на рисунке прямые. Найдите квадрат расстояния: а) между вершинами B и C_1; б) от вершины C_2 до прямой BC; в) между прямыми AD и B_2C_2; г) от вершины B_1 до плоскости $(A_2D_2C_2)$; д) между плоскостями (ADC) и $(A_2D_2C_2)$; е) между прямыми AD и A_2C_2.  	**1.** Все двугранные углы многогранника, изображенного на рисунке прямые. Найдите расстояние: а) между вершинами A_3 и C_1; б) от вершины C_2 до прямой AB; в) между прямыми AD_1 и B_2C_3; г) от вершины B до плоскости $(A_2D_2D_3)$; д) между плоскостями (ADC)и $(A_2D_2C_2)$; е) между прямыми AD и B_2C_3.  	**1.** Все двугранные углы многогранника, изображенного на рисунке прямые. Найдите расстояние: а) между вершинами F и C_1; б) от вершины C_2 до прямой AF; в) между прямыми A_2D_2 и DE; г) от вершины B до плоскости $(C_1F_1E_1)$; д) между плоскостями (AFD_2) и $(C_1F_1C_2)$; е) между прямыми DC и FC_2. 
2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $8\sqrt{6}$. Найдите расстояние от середины ребра B_1C_1 до прямой MT, где точки M и T – середины ребер CD и A_1B_1 соответственно.	**2.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости $AB1D1$.	**2.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите расстояние от вершины A до плоскости A_1BT, где T – середина ребра AD.
3. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна 8, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{2}$. На ребрах BC и C_1D_1 отмечены точки K и L	**3.** Дана пирамида $SABC$, в которой $SC=SB=AB=AC=\sqrt{17}$, $SA=BC=2\sqrt{5}$. Найдите расстояние между ребрами BC и SA, если ребро SA перпендикулярно ребру BC.	**3.** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка P – делит сторону AB в отношении 2:3, считая от вершины A, точка K – делит сторону BC в отношении 2:3, считая от вершины C.

соответственно, причем $BK = C_1L = 2$. Плоскость α параллельна прямой BD и содержит точки K и L. Прямая A_1C перпендикулярна плоскости α. Найдите расстояние от точки B до плоскости α .		Через точки P и K параллельно SB проведена плоскость α. Сечением пирамиды плоскостью α является прямоугольник. Найдите расстояние от точки S до плоскости α, если известно, что SC = 5, AC = 6.

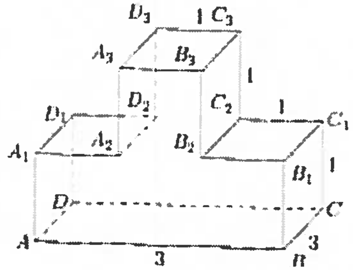
<table>
<tr><th>Вариант 7</th><th>Вариант 8</th><th>Вариант 9</th></tr>
<tr>
<td>

1. Все двугранные углы многогранника, изображенного на рисунке прямые.
Найдите расстояние:
а) между вершинами A_2и C_1;
б) от вершины D_2 до прямой AB;
в) между прямыми AD и B_2C_2;
г) от вершины A до плоскости ($A_2B_2C_2$);
д) между плоскостями (ADD_2) и ($A_1B_2C_2$);
е) между прямыми AD и D_1B_1.



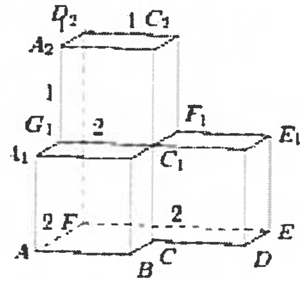
</td>
<td>

1. Все двугранные углы многогранника, изображенного на рисунке прямые.
Найдите расстояние:
а) между вершинами A_2 и D_3;
б) от вершины C_3 до прямой AD;
в) между прямыми AD_1 и BC_1;
г) от вершины A_3 до плоскости ($A_2D_2D_1$);
д) между плоскостями ($A_3D_3D_2$) и (A_1D_1D);
е) между прямыми A_1D_1 и D_3B_3.



</td>
<td>

1. Все двугранные углы многогранника, изображенного на рисунке прямые.
Найдите квадрат расстояния:
а) между вершинами G_1 и C_2;
б) от вершины D_2 до прямой DE;
в) между прямыми A_2C_2 и CE;
г) от вершины G_1 до плоскости (CDE);
д) между плоскостями (BCC_1) и (A_2D_2F);
е) между прямыми AE и D_2F.



</td>
</tr>
<tr>
<td>

2. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, равной $2\sqrt{10}$; высота призмы равна $2\sqrt{5}$. Найдите расстояние от точки $C1$ до плоскости BCM, где M – середина ребра A_1C_1.

</td>
<td>

2. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые ребра равны 3, точка D – середина ребра CC_1. Найдите расстояние от вершины C до плоскости ADB_1.

</td>
<td>

Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ с вершиной D. Боковое ребро пирамиды равно $\sqrt{43}$ высота равна$\sqrt{31}$. Найдите расстояние от середины бокового ребра BD до прямой MT, где точки M и T — середины ребер AC и AD соответственно.

</td>
</tr>
</table>

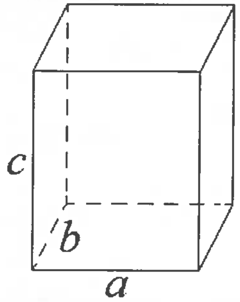
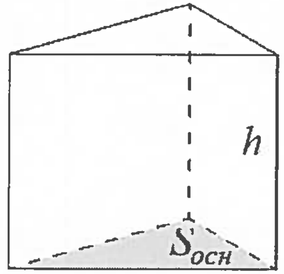
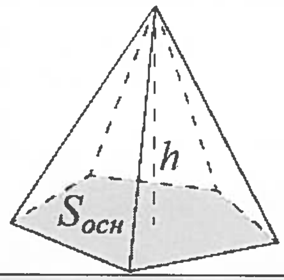
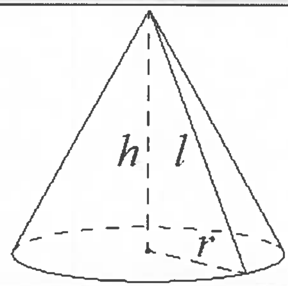
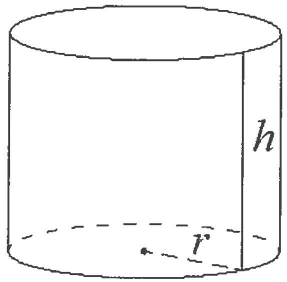
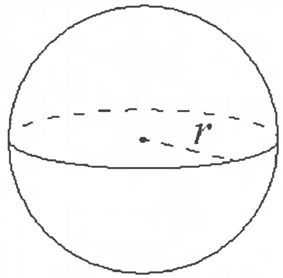
3. Основание пирамиды *DABC* – прямоугольный треугольник *ABC* с прямым углом *C*. Высота пирамиды проходит через середину ребра *AC*, а боковая грань *ACD* – равносторонний треугольник. Сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро *BC* и произвольную точку *M* ребра *AD*, – прямоугольный треугольник. Найдите расстояние от вершины *D* до этой плоскости, если *M* – середина ребра *AD*, а высота пирамиды равна 6.	**3.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рёбра равны 1. На продолжении отрезка A_1C_1 за точку C_1 отмечена точка *M* так, что $A_1C_1 = C_1M$, а на продолжении отрезка B_1C за точку *C* отмечена точка *N* так, что $B_1C=CN$. Известно, что $MN=MB_1$. Найдите расстояние между прямыми B_1C_1 и *MN*.	**3.** В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* сторона основания *AB* равна 8, а боковое ребро *SA* равно 10. На рёбрах *CD* и *SC* отмечены точки *N* и *K* соответственно, причём DN:NC=SK:KC=1:7 Плоскость α содержит прямую *KN* и параллельна прямой *BC* и делит ребро *SB* в отношении 1:7, считая от вершины *S*. Найдите расстояние между прямыми *SA* и *KN*.

ОТВЕТЫ

	ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2	ВАРИАНТ 3	ВАРИАНТ 4	ВАРИАНТ 5	ВАРИАНТ 6	ВАРИАНТ 7	ВАРИАНТ 8	ВАРИАНТ 9
1.	а) 3 б) $\sqrt{5}$ в) $\sqrt{5}$ г) 2 д) 2 е) $\sqrt{2}$	а) 14 б) 4 в) 10 г) 1 д) 9 е) 4,5	а) $\sqrt{3}$ б) $\sqrt{5}$ в) 2 г) 2 д) 2 е) $\sqrt{2}$	а) 5 б) 5 в) 5 г) 1 д) 4 е) 4	а) $\sqrt{14}$ б) $\sqrt{10}$ в) 2 г) 2 д) 1 е) 2	а) $\sqrt{3}$ б) $\sqrt{5}$ в) $2\sqrt{2}$ г) 1 д) 1 е) 1	а) 3 б) $2\sqrt{2}$ в) $\sqrt{5}$ г) 2 д) 1 е) 1	а) $\sqrt{10}$ б) $2\sqrt{2}$ в) 3 г) 1 д) 1 е) 1	а) 3 б) 8 в) 4 г) 1 д) 1 е) 2
2.	8	2	$3\sqrt{41}$	12	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{6}$	2	$\frac{3\sqrt{13}}{13}$	3
3.	$\frac{2\sqrt{15}}{7}$	$\frac{12\sqrt{26}}{13}$	$\frac{32\sqrt{57}}{57}$	$\frac{2\sqrt{10}}{5}$	$\sqrt{7}$	$\frac{9\sqrt{39}}{25}$	$2\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{\sqrt{357}}{21}$

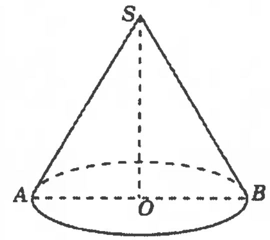
5.2 Площади поверхностей и объёмы тел

Справочная информация

Прямоугольный параллелепипед		**Прямая призма**	
	$V = abc$		$V = S_{осн}\, h$
Пирамида		**Конус**	
	$V = 1/3\ S_{осн}\, h$		$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $S_{бок} = \pi r l$
Цилиндр		**Шар**	
	$V = \pi r^2 h$ $S_{бок} = 2\pi r h$		$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $S = 4\pi r^2$

Тип 1 (базовый уровень)

1. Диаметр основания конуса равен 12, а длина образующей – 10. Найдите объем конуса. В ответе запишите $\frac{v}{\pi}$.



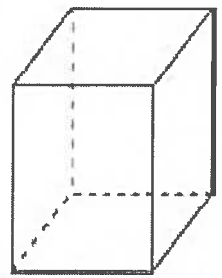
Решение:

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$r = 6 \;\; h = 8 \;\; V = \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 8 = 96\pi$

Ответ: 96.

2. Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 4, 5 и 8. Найдите объем параллелепипеда.



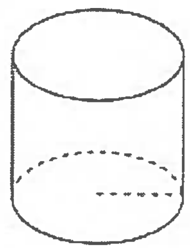
Решение:

$V = a \cdot b \cdot c$

$V = 4 \cdot 5 \cdot 8 = 160$

Ответ:160

3. Радиус основания цилиндра равен 4, высота $\frac{10}{\pi}$. Найдите объем цилиндра.



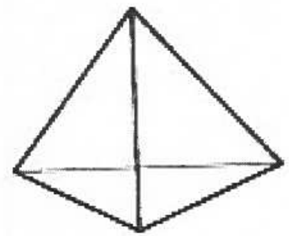
Решение:

$V = \pi r^2 h$

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot \frac{10}{\pi} = 160$$

Ответ:160

4. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами 4 и 3. Найдите объем пирамиды, если её высота равна 9.



Решение:

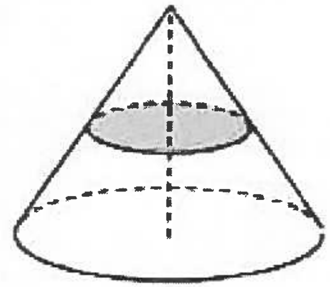
$V = \frac{1}{3} S_{осн} h$

$S_{осн} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \quad S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$

$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 9 = 18$

Ответ:18

5. Объем конуса равен 12. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту конуса пополам. Найдите объем отсеченного конуса.



Решение:

Способ 1

Линейные размеры большого конуса r и h. Линейные размеры маленького конуса $\frac{r}{2}$ и $\frac{h}{2}$.

$\frac{1}{3}\pi r^2 = 12$

$\frac{1}{3}\pi \frac{r^2}{4} \cdot \frac{h}{2} = V_м$

Преобразуем:

$\pi r^2 = 36$

$\frac{1}{24}\pi r^2 = V_м$

Подставим:

$\frac{1}{24} \cdot 36 = V_м$

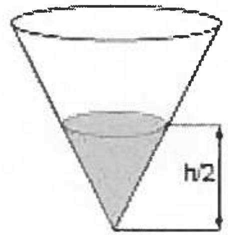
$V_м = 1{,}5$

Ответ: 1,5

Способ 2

Подсказка:
При изменении всех линейных размеров тела в k раз, объем этого тела изменяется в k^3 раз.
$k = 2 \quad k^3 = 8 \; V = \frac{12}{8} = 1{,}5$
Ответ:1,5

Данный прием решения задач не требует знания формулы объема конуса.

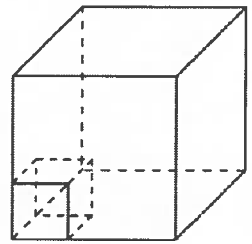


6. Коническая воронка объемом 16 литров полностью заполнена жидкостью. Из воронки вычерпали часть жидкости, при этом ее уровень снизился до половины высоты воронки. Сколько литров жидкости вычерпали?

Решение:

$$k = 2 \quad k^3 = 8 \; V = \frac{16}{8} = 2$$

Найдем, сколько литров жидкости вычерпали:
16-2=14
Ответ:14



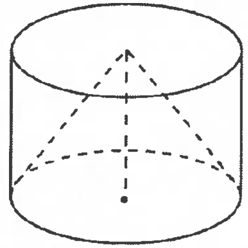
7. Объём прямоугольного параллелепипеда равен 108. Чему будет равен объём параллелепипеда, если каждое его ребро уменьшить в три раза?

Решение:

$$k = 3 \quad k^3 = 27 \; V = \frac{108}{27} = 4$$

Ответ: 4

8. Объём цилиндра равен 30. Чему равен объём конуса с таким же основанием и высотой?



Подсказка*:*

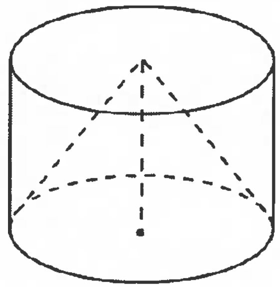
Если цилиндр и конус имеют общее основание и высоту, то $\boldsymbol{V_k = \frac{1}{3} V_ц}$

Решение:

$$V_k = \frac{1}{3} \cdot 30 = 10$$

Ответ:10

9. Объём конуса равен 25. Чему равен объём цилиндра с таким же основанием и высотой?



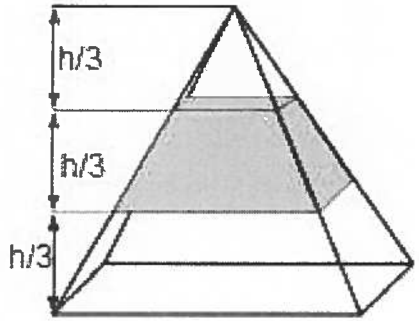
Решение:

$$25 = \frac{1}{3} V_ц$$

$$V_ц = 75$$

Ответ:75

Тип 2 (повышенный уровень)



1. Четырехугольная пирамида весом 81 горизонтальными плоскостями разрезана на 3 части одинаковой высоты. Найдите вес средней части пирамиды.

Решение:

При решении данной задачи можно использовать подсказку из задачи №5 типа 1.

Найдем массу части пирамиды состоящей из двух частей (верхняя и средняя):

$k = \frac{2}{3} \quad k^3 = \frac{8}{27} \quad m = 81 \cdot \frac{8}{27} = 24$

Найдем массу верхней части пирамиды

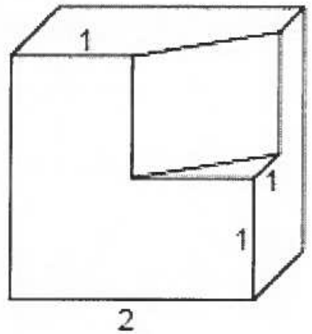
$k = \frac{1}{3} \quad k^3 = \frac{1}{27} \quad m = 81 \cdot \frac{1}{27} = 3$

Найдем вес средней части пирамиды:

24-3=21

Ответ: 21

2. Найдите объем части куба



Решение:

Для того чтобы найти объем части куба. Необходимо из объема всего куба вычесть объем призмы в основании которой лежит равнобедренный прямоугольный треугольник.

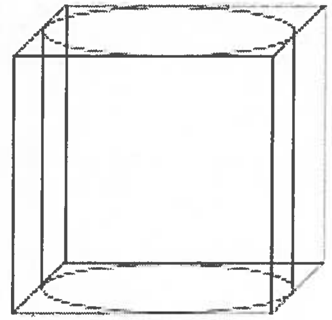
$V_k = 2^3 = 8$

$V_п = S_{осн} h = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 0{,}5$

$V_ч = 8 - 0{,}5 = 7{,}5$

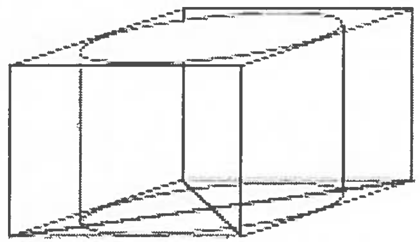
Ответ: 7,5

3. Куб описан около цилиндра объемом 16 π. Найдите объем куба.



Решение:
Так как цилиндр вписан в куб, то диаметр цилиндра и высота равны ребру куба.
$V_k = a^3$
Для цилиндра $h = a, r = \frac{a}{2}$ $\quad V = \pi\frac{a^2}{4}\cdot a = \frac{1}{4}\pi a^3$
$16\pi = \frac{1}{4}\pi a^3$ $\quad a^3 = 64$ $\ V_k = 64$
Ответ: 64

4. Основанием прямой призмы является ромб с диагоналями 2 и 6. Найдите объем цилиндра, вписанного в эту призму, если объем призмы равен $\frac{3}{\pi}$.



Решение:
Задача многоэтапная и требует знание не только формул объемов тел.

$V_ц = \pi r^2 h$ $\ r_ц -?$ $\ h_ц -?$
1.$h_ц = h_п$

$$h_п = \frac{V_п}{S_{осн}}$$

$$S_{осн} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 6 = 6$$
$$h_п = \frac{3}{\pi} : 6 = \frac{1}{2\pi}$$

$$h_ц = \frac{1}{2\pi}$$

2. $r_ц = \frac{1}{2} h_{осн}$

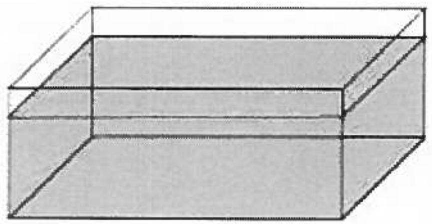
$h_{осн} = \frac{S_{осн}}{a_{осн}}$, где $a_{осн} = \sqrt{10}$ по теореме Пифагора

$$h_{осн} = \frac{6}{\sqrt{10}}$$

$$r_ц = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

3. $V_ц = \pi \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{9}{20}$=0,45

Ответ: 0,45



5. Объем раствора в гальванической ванне равен 3 куб. м, при этом уровень раствора достигает высоты 75 см. В ванну погрузили деталь, после чего уровень раствора поднялся на 2 см. Найдите объем детали (в куб. м).

Решение:

За основу берется формула $V = S_{осн} \cdot h$

Объем раствора в гальванической ванне можно найти по формуле: $3 = S_{осн} \cdot 75$

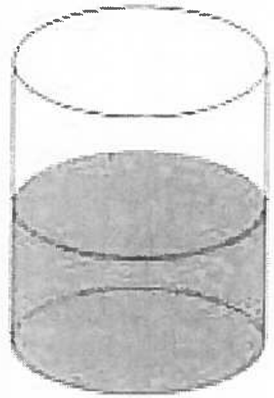
Объем детали погруженную в эту же ванную находим по этой же формуле: $V_д = S_{осн} \cdot 2$

Сделаем необходимые преобразования:

Из первой формулы $S_{осн} = \frac{1}{25}$ и подставим во вторую $V_д = \frac{1}{25} \cdot 2 = \frac{2}{25} = 0,08$

Ответ: 0,08

6. В цилиндрический сосуд налили 3000 см^3 воды. Уровень воды при этом достиг высоты 20 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 3 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см^3



Решение:

При решении данной задачи можно воспользоваться утверждением: Объем налитой воды в сосуд прямо пропорционален уровню (высоте) воды в данном сосуде, при условии, что $S_{осн}$ величина постоянная.

3000 см^3 – 20 см

x см^3 - 3 см

x = (3000·3):20

x = 450

Ответ:450

7. Радиус основания цилиндра увеличили в 3 раза, а его высоту уменьшили в 3,6 раза. Во сколько раз увеличится объем цилиндра?

Решение:

Решение данной задачи сводится к работе с формулами.

Измерение первого цилиндра

r и h

$V_1 = \pi r^2 h$

Измерения второго цилиндра

$3r$ и $\frac{5}{18}h$

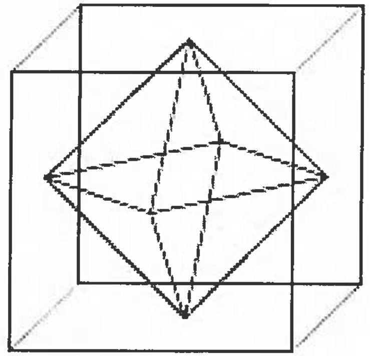
$V_2 = \pi 9r^2 \frac{5}{18}h$

Найдем отношение $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\pi 9r^2 \frac{5}{18}h}{\pi r^2 h}$

$\frac{V_2}{V_1} = 2{,}5$

Ответ: 2,5

8. Вершины многогранника являются центрами граней куба. Найдите объем куба, если объем многогранника равен 12.



Решение:

Обозначим ребро куба через a.

Многогранник составлен из двух равных пирамид имеющих общее основание.

$V_{м} = 2 \cdot V_{п}$, то есть

$V_{м} = 2 \cdot \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h_{п}$, где $h_{п} = \frac{a}{2}$, а $S_{осн} = \frac{a^2}{2}$, где сторона основания равна $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Подставим в формулу $V_{м} = 2 \cdot \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h_{п}$

$12 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{a}{2}$

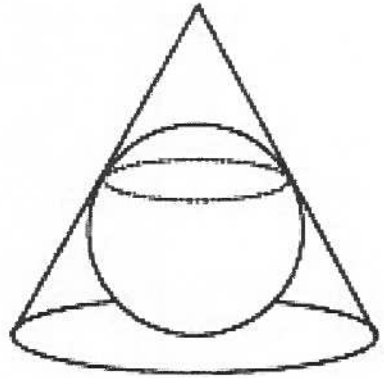
$12 = \frac{a^3}{6}$

$a^3 = 72$

Так как $V_k = a^3$, то $V_k = 72$

Ответ: 72

9. В конус объемом 36 вписан шар. Найдите объем шара, если осевое сечение конуса является равносторонним треугольником.



Решение:

Использовать будем две формулы: $V_ш = \frac{4}{3}\pi r^3$ и $V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Так как осевое сечение конуса является равносторонний треугольник со стороной a, то $r_k = \frac{a}{2}$, а $h_k = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Тогда $r_ш = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Подставим в формулу V_k и упростим:

$$36 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$a^3\pi\sqrt{3} = 864$$

Подставим в формулу $V_ш$ и упростим:

$$V_ш = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{3a^3\sqrt{3}}{216}$$

$$V_ш = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{54}$$

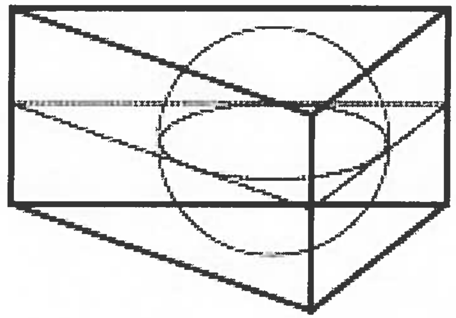
Исходя из того, что

$a^3\pi\sqrt{3} = 864$

$$V_ш = \frac{864}{54} = 16$$

Ответ:16

10. В правильную треугольную призму объемом $\frac{81\sqrt{3}}{4}$ вписан шар. Найдите радиус шара.



Решение:

Выразим объем призмы, используя формулу: $V_п = S_{осн} \cdot h$, где $S_{осн} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Используем решение предыдущей задачи.

$$r_ш = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$h_п = 2r_ш$$

$$h_п = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Подставим в формулу объема призмы

$$\frac{81\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$a^3 = 81\sqrt{3}$$

$$a = 3\sqrt{3}$$

Теперь найдем $r_ш$:

$$r_ш = \frac{3\sqrt{3}\sqrt{3}}{6} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Ответ: 1,5

Задачи для самостоятельного решения:

I уровень - это задания на 1-2 логических шага в основном репродуктивного характера. Для решения их учащимся достаточно знать правила, определения, теоремы, формулы, простейшие зависимости между компонентами математических действий, элементами геометрических фигур.

II уровень – включает более сложные задания на 2-4 логических шага; для их решения требуется более широкий круг математических знаний, умений и практических навыков.

I уровень

1. Высота правильной треугольной пирамиды равна $4\sqrt{3}$ см, а высота её основания равна $2\sqrt{3}$ см . Вычислить объём пирамиды.

2. Осевое сечение цилиндра является квадрат, диагональ которого равна $4\sqrt{2}$ см. Вычислить отношение объёма цилиндра к числу π .

3. Сторона основания правильной четырёхугольной призмы равна 8 см, а её боковое ребро равно 10 см. Вычислить объём призмы.

4. Высота правильной четырёхугольной пирамиды равна 10 см, а диагональ её основания равна 6 см. Вычислить объём пирамиды.

5. Осевое сечение конуса – правильный треугольник , сторона которого равна $4\sqrt{3}$ см. Вычислить отношение объёма конуса к числу π .

6. Сторона основания правильной треугольной призмы равна 4 см , а её боковое ребро $2\sqrt{3}$ см . Вычислить объём призмы.

7. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 6 см , а её высота равна $5\sqrt{3}$ см .Вычислить объём пирамиды.

8. Осевое сечение цилиндра является квадрат, площадь которого равна 64 см. Вычислить отношение объёма цилиндра к числу π.

9. В основании пирамиды лежит прямоугольник со сторонами 12 ,10 см. Высота пирамиды равна 8 см. Вычислить объём пирамиды.

10. В основании пирамиды лежит ромб с диагоналями 12 и 16 см. Высота пирамиды равна 20 см. Вычислить объём пирамиды.

11. Высота правильной треугольной призмы равна $4\sqrt{3}$ см, а радиус окружности , описанной около её основания ,равен $2\sqrt{3}$ см .Вычислить объём призмы.

12. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, основание которого 8 см, а высота, проведённая к нему, 5 см. Вычислить объём пирамиды, если её высота равна 12 см.

13. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник, основание которого 12 см, а высота, проведённая к нему , 8 см .Длина бокового ребра призмы равна 10 см .Вычислить объём призмы.

14. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами 8 и 6 см. Высота пирамиды равна 10 см. Вычислить объём пирамиды.

15. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 13 ,14 и 15 см. Высота пирамиды равна 10 см. Вычислить объём пирамиды.

16. В основании прямой призмы лежит прямоугольник, стороны которого 8 и 6 см. Боковое ребро призмы равно 10 см. Вычислить объём призмы.

17. В основании пирамиды лежит прямоугольник, стороны которого равны 8 и10 см. Вычислить объём пирамиды, если её высота равна 12 см.

18. В основании призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8 см. Высота призмы равна 10 см. Вычислить объём призмы.

19. Длина основания цилиндра равна 12π см, а его высота равна 10 см. Вычислить отношение объёма цилиндра к числу π.

20. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 10 см .Вычислить объём пирамиды ,если её высота равна $10\sqrt{3}$ см.

21. В основании прямой призмы лежит ромб, диагонали которого равны 6 и 8 см. Боковое ребро призмы равно 20 см. Вычислить объём призмы.

22. В основании пирамиды лежит ромб. Основанием высоты является точка пересечения диагоналей ромба, которая удалена от его вершин на расстоянии 4 и 3 см. Вычислить объём пирамиды, если её высота равна 10 см.

23. Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды равна 10 см. Вычислить объём пирамиды, если её высота равна 30 см.

24. В основании пирамиды лежит ромб, сторона которого равна 8 см, а его высота - 6 см . Высота пирамиды равна 10 см. Вычислить объём пирамиды.

25. В основании пирамиды лежит треугольник, одна из сторон которого равна 8 см, а высота, проведённая к ней - 5 см. Вычислить объём пирамиды, если её высота равна 12см.

26. В основании пирамиды лежит ромб, сторона которого равна 8 см. Основанием высоты является центр окружности, вписанной в её основание; радиус этой окружности равен 5 см. Высота пирамиды 12 см .Вычислить объём пирамиды.

27. В основании прямой призмы лежит треугольник, сторона которого равна 12 см, а высота, проведённая к ней - 5 см .Боковое ребро призмы равно 8 см .Вычислить объём призмы.

28. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник. Все боковые рёбра пирамиды равны. Основание высоты пирамиды удалено от катетов этого треугольника на 3 и 4 см .Высота пирамиды равна 10 см .Вычислить объём пирамиды.

29.В основании пирамиды лежит ромб, диагонали которого равны 6 и 8 см. Высота пирамиды равна 16 см. Вычислить объём пирамиды.

30. Высота правильной четырёхугольной призмы равна 10 см , а радиус окружности , описанной около основания ,равен $5\sqrt{2}$ см .Вычислить объём призмы.

ОТВЕТЫ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
16	16	640	60	24	24	45	128	320	640
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
108	80	480	80	280	480	320	240	360	250
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
480	80	1000	160	80	320	240	80	128	1000

II уровень

1. В правильной треугольной призме радиус окружности описанной около основания , равен 2см , а диагональ боковой грани равна $2\sqrt{15}$ см .Вычислить объём призмы.

2. В правильной четырёхугольной пирамиде апофема равна 5 см ,а радиус окружности , описанной около основания , равен $4\sqrt{2}$ см .Вычислить объём пирамиды .

3. В цилиндре на расстоянии 4 см от его оси и параллельно к ней проведено сечение , диагональ которого равна $6\sqrt{5}$ см .Вычислить отношение объёма цилиндра к числу π , если это сечение пересекает основание по хорде ,равной 6 см .

4. В основании пирамиды лежит правильный треугольник ,сторона основания которого равна 12 см .Основанием высоты пирамиды является середина стороны данного треугольника .Наибольшее боковое ребро равно $10\sqrt{3}$ см .Вычислить объём пирамиды .

5. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, основание которого равно 6 см, а высота, проведённая к ней 4 см. Основанием высоты пирамиды является вершина данного треугольника, которая противоположна его основанию. Большее боковое ребро равно 13 см. Вычислить объём пирамиды.

6. В основании прямой призмы лежит ромб со стороной 5 см и диагональю 8 см. Вычислить объём призмы, если диагональ боковой грани равна 13 см.

7. Основанием пирамиды является ромб, площадь которого равна 600см^2, а сторона – 25 см .Высоты всех боковых граней равны 15 см. Вычислить объём пирамиды.

8. Высота правильной треугольной пирамиды равна $\sqrt{3}$ см. Апофема (высота боковой грани) равна $\sqrt{6}$ см. Вычислить объём пирамиды.

9. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, катет которого равен 6 см, а радиус, описанной вокруг него окружности 5 см. Все боковые рёбра пирамиды равны 13 см. Вычислить объём пирамиды.

10. В нижнем основании цилиндра хорда, которая равна 6 см, удалена от его оси на 4 см. Вычислить отношение объёма цилиндра к числу π, если расстояние от центра верхнего основания до конца этой хорды равно 13 см.

11. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной 10 см и медианой, проведённой к основанию, 8 см. Вычислить объём призмы, если диагональ большей грани равна 13 см.

12. В правильной треугольной пирамиде радиус вписанной в основание окружности равен $\sqrt{3}$ см ,а апофема $\sqrt{51}$ см .Вычислить объём пирамиды .

13. В цилиндре на расстоянии 4 см от его оси и параллельно ей проведено сечение , диагональ которого $6\sqrt{5}$ см . Вычислить отношение объёма цилиндра к числу π ,если его радиус 5 см .

14. В основании пирамиды лежит прямоугольник, стороны которого 6 и 8 см. Все боковые рёбра пирамиды равны 13 см. Вычислить объём пирамиды.

15. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, в котором высота, проведённая к его основанию, равна 8 см, а радиус окружности, вписанной в него ,3 см. Высоты всех боковых граней пирамиды равны 5 см. Вычислить объём пирамиды.

16. В правильной четырёхугольной призме радиус окружности ,описанной около основания ,равен $10\sqrt{2}$ см .Диагональ боковой грани 25 см .Вычислить объём призмы .

17. В правильной четырёхугольной призме диагональ её равна 9 см ,а диагональ боковой грани $\sqrt{65}$ см .Вычислить объём призмы.

18. В основании прямой призмы лежит прямоугольная трапеция с основаниями 9 и 14 см и большей боковой стороной 13 см. Вычислить объём призмы, если меньшая её диагональ 25 см.

19. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, катет которого15 см, а гипотенуза 25 см. Высоты всех боковых граней пирамиды равны 13 см. Вычислить объём пирамиды.

20. В основании пирамиды лежит правильный треугольник, сторона которого 8 см. Основание высоты попадает на середину стороны данного треугольника .Наибольшее боковое ребро равно$4\sqrt{6}$ см .Вычислить объём пирамиды .

21. В правильной четырёхугольной пирамиде радиус окружности, вписанной в основание, равен 4 см, а апофема 5 см. Вычислить объём пирамиды.

22. В правильной треугольной пирамиде радиус описанной около основания окружности равен $2\sqrt{3}$ см .Вычислить объём пирамиды ,если её боковое ребро равно $2\sqrt{15}$ см .

23. В цилиндре на расстоянии 4 см от его оси и параллельно ей проведено сечение , диагональ которого равна $6\sqrt{5}$ см .Вычислить отношение объёма цилиндра к числу π , если его высота 12 см .

24. В основании пирамиды лежит прямоугольник, одна из сторон которого равна 8 см. Все боковые рёбра пирамиды равны 13 см. Вычислить объём пирамиды, если её высота 12 см.

25. В основании пирамиды лежит правильный треугольник, сторона которого 6 см. Основанием высоты является вершина этого треугольника .Высота большей боковой грани равна $5\sqrt{3}$ см .Вычислить объём этой пирамиды .

26. В основании прямой призмы лежит прямоугольник со стороной 6 см и радиусом описанной окружности 5 см. Вычислить объём призмы, если её диагональ равна 26 см.

27. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, основание которого 12 см, а боковая сторона 10 см. Высоты всех боковых граней 5 см. Вычислить объём пирамиды.

28. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 6 см , а апофема -$\sqrt{51}$ см .Вычислить объём пирамиды .

29. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, катеты которого равны 15 и 20 см. Высоты всех боковых граней равны 13 см. Вычислить объём пирамиды.

30. В основании прямой призмы лежит равнобедренный треугольник с основанием 12 см и боковой стороной 10 см. Вычислить объём призмы, если диагональ меньшей боковой грани равна 26 см.

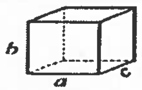
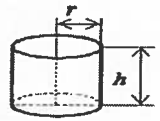
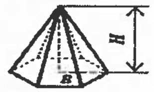
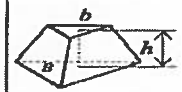
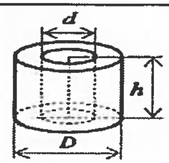
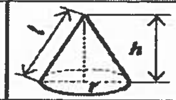
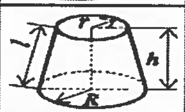
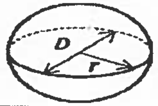
ОТВЕТЫ

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
36	64	300	288	48	288	1800	9	24	300
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
240	18	300	192	64	6000	112	2760	600	64
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
64	36	300	192	36	1152	64	36	600	1152

5.3 Поверхности геометрических тел

Справочная информация

Объемы и поверхности геометрических тел

Название	Изображение	Объем	Полная поверхность
1	2	3	4
Куб		$V=a^3$	$S=6a^2$
Прямоугольный параллелепипед		$V=abc$	$S=2(ab+bc+ac)$
Цилиндр		$V=\pi r^2 h$	$S=2\pi r(r+h)$
Пирамида		$V=\frac{1}{3}BH$	—
Усеченная пирамида		$V=\frac{1}{3}h(B+b+$ $+\sqrt{Bh})$	—
Полый цилиндр		$V=\frac{\pi}{4}h(D^2-d^2)$	—
Конус		$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$	$S=\pi(r+l)$
Усеченный конус		$V=\frac{\pi}{3}h(R^2+r^2+Rr)$	$S=\pi(R^2+r^2+$ $+l\cdot(R+r)$
Шар		$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{1}{6}\pi D^3$	$S=4\pi r^2$

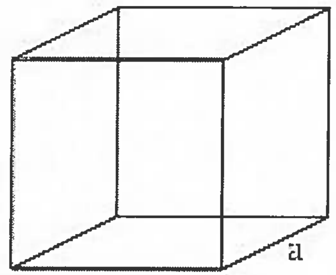
Формула площади поверхности призмы

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна периметру основания умноженному на высоту призмы (высота=боковому ребру).

$$S_{бок} = ph = pl$$

p — периметр основания;
h — высота;
l — боковое ребро.

Формула площади поверхности куба



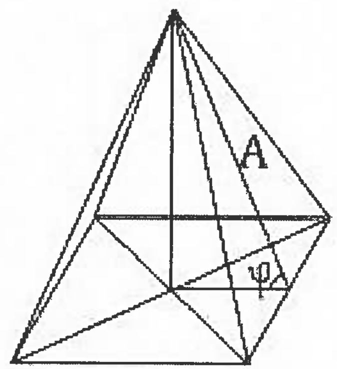
Площадь боковой поверхности куба равна числу боковых граней умноженному на квадрат ребра.

$$S_{бок} = 4a^2$$

Площадь полной поверхности куба равна числу всех граней куба умноженному на квадрат ребра.

$S_{полн.} = 6a^2$, **a** — ребро куба.

Формула площади поверхности пирамиды



1) Правильная пирамида:

$$S_{бок} = 1/2pA$$

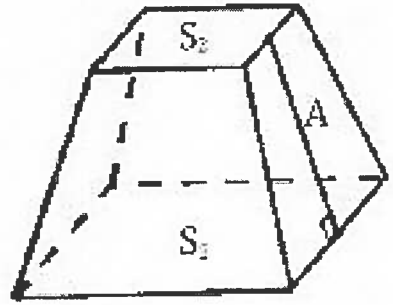
p — периметр основания;
A — апофема.

$$S_{бок} = S/\cos\varphi$$

S — площадь основания;
φ — угол между боковой гранью и основанием пирамиды.

$$S_{бок} = S_{гр}\, n$$

$S_{гр}$ — площадь одной боковой грани;
n — количество боковых граней пирамиды.
2) Правильная усеченная пирамида:



$$S_{бок} = 1/2(p_1 + p_2)A$$

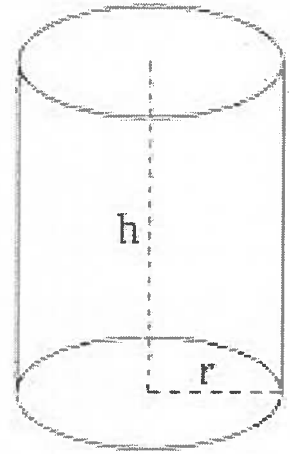
p_1 ,p_2 — периметры оснований;

A — апофема.

$$S_{полн.} = S_{бок} + S_1 + S_2$$

$S_{полн.}$ — площадь полной поверхности правильной усеченной пирамиды;
$S_{бок}$ — площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды;
$S_1 + S_2$ — площади оснований.

Формула площади поверхности цилиндра

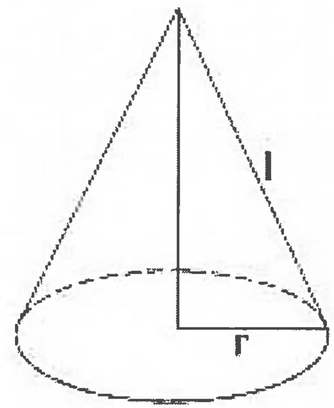


$$S_{бок} = 2\pi rh = \pi dh$$

$$S_{полн.} = 2\pi r^2+2\pi rh = 2\pi(r+h)$$

$S_{полн.}$ — площадь полной поверхности цилиндра;
r — радиус цилиндра;
d — диаметр цилиндра;
h — высота цилиндра.

Формула площади поверхности конуса



1) Прямой круговой конус:

$$S_{бок} = \pi rl = 1/2\ \pi dl$$

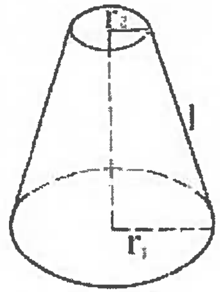
$$S_{полн.} = \pi r^2 + \pi rl= \pi r(r+l)$$

$S_{полн.}$— площадь полной поверхности конуса;
r -радиус конуса;
d -диаметр конуса;

l — образующая конуса.

2) Усеченный прямой круговой конус:

$$S_{бок} = \pi l(r_1 + r_2) = 1/2\pi l(d_1 + d_2)$$



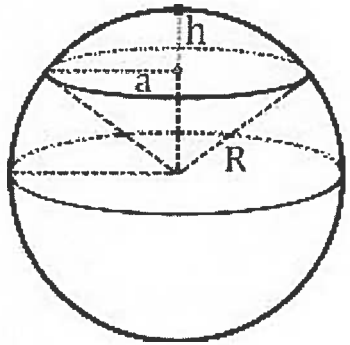
$$S_{полн.} = \pi l(r_1 + r_2) + \pi(r_1 + r_2)$$

$S_{полн.}$ — площадь полной поверхности усеченного конуса;
r_1, r_2 — радиусы оснований усеченного конуса;
d_1, d_2 — диаметры оснований усеченного конуса;
l — образующая усеченного конуса.

Формула площади поверхности шара (сферы)

Шар — тело, созданное вращением полукруга вокруг диаметра.
Сфера — поверхность шара.

$$S_{полн.} = 4\pi R^2 = \pi D^2$$



Формула площади поверхности сферического сегмента

Сферический сегмент — часть сферы, что отсекается от сферы плоскостью.

$$S_{сф.\ сегм.} = 2\pi Rh = \pi(a^2 + h^2)$$

Формула площади поверхности шарового сегмента

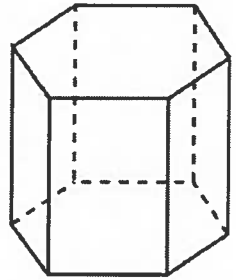
Шаровой сегмент — часть шара, что отсекается от шара плоскостью, и ограничивается кругом (основание шарового сегмента) и сферическим сегментом.

$$S_{шар.\ сегм.} = \pi(2Rh+a^2)=\pi(h^2+2a^2)$$

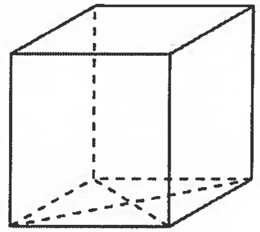
R — радиус шара;
D — диаметр шара;
h — высота сегмента;
a — радиус основания сегмента.

1.3.1. Задачи

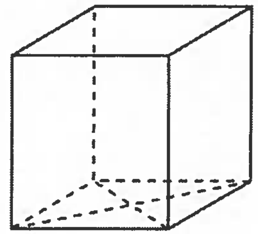
I уровень



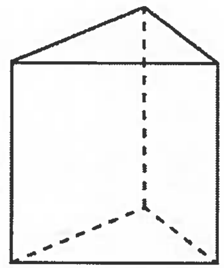
1. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5, а высота — 10.



2. Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8, и боковым ребром, равным 10.



3. В основании прямой призмы лежит ромб с диагоналями, равными 6 и 8. Площадь ее поверхности равна 248. Найдите боковое ребро этой призмы.



4. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Площадь ее поверхности равна 288. Найдите высоту призмы.