Краснодарский край, город Сочи
Негосударственное (частное) общеобразовательное учреждение (НОУ)
гимназия «Школа бизнеса»

Сборник задач по математике для 9 -11 классов «Применение теоремы Менелая при решении олимпиадных задач, заданий ОГЭ и ЕГЭ »

Составитель: Бурлакова Ирина Владимировна,
учитель математики

Сочи 2023

Содержание:

1. Пояснительная записка

К основной цели данной работы относится практическое внедрение применения теоремы Менелая обучающимися 9 - 11 классов при решении олимпиадных задач, заданий ОГЭ и ЕГЭ. Геометрические задачи вызывают наибольшие трудности у учащихся. При этом можно утверждать, что как раз геометрия лучше всего развивает нестандартное мышление и помогает выделить математически одаренных школьников.

Данная теорема в школьном курсе математики относится к категории тех знаний, которые редко приходится применять при решении задач школьного курса геометрии. Нередко учащиеся 9 и 11 классов сталкиваются с трудностями при решении практических задач по геометрии, которые содержатся во второй части ОГЭ/ЕГЭ и являются наиболее сложными. Знание теоремы Менелая может значительно упростить решение некоторых видов задач.

На ОГЭ, ЕГЭ и различных олимпиадах встречаются задачи на нахождение отношений длин отрезков, площадей и объёмов. При решении таких задач целесообразно использовать теорему Менелая.

Замечательным свойством теоремы является то, что она может служить отправной точкой при повторении основных свойств треугольника в 9 и 11 классах. В частности, с её помощью легко доказываются следующие утверждения:

- медианы треугольника пересекаются в одной точке;
- высоты треугольника пересекаются в одной точке;
- биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке.

Для решения геометрических задач можно применить многообразие методов. Поэтому остановимся на том, когда же имеет смысл применять теорему Менелая при решении задач. Возможность применить теорему Менелая имеет смысл, когда в условии задачи:

1) идёт речь об отношении отрезков (требуется доказать равенство отрезков, доказать, что точка является серединой отрезка);

2) если на чертеже имеются элементы, присутствующие в теореме Менелая (треугольник и прямая, пересекающая его стороны или их продолжения).

Применение теоремы Менелая даёт дополнительные возможности при изучении геометрии, помогает повысить уровень пространственного воображения и уровень логической культуры. Теорема Менелая помогает решить задачи более рационально, чем другие способы, быстро и оригинально решить задачи повышенной сложности.

Инструкция по организации работы с обучающимися

Сборник задач для 9 -11 классов по теме: «Применение теоремы Менелая при решении олимпиадных задач, заданий ОГЭ и ЕГЭ» учителя математики Бурлаковой И.В. предназначен для учителей, преподающих математику на базовом и углубленном уровнях в 9-11 классах.

Главная цель пособия – помочь обучающимся освоить теорему Менелая, выработать необходимые умения для применения изученного материала к решению различных задач и приобрести необходимые для этого навыки.

Данный сборник задач в первую очередь является обучающим, он с одинаковым успехом может использоваться для отработки практических умений как во время урока или внеклассного мероприятия при сопровождении учителя, так и для организации самостоятельной и самообразовательной деятельности обучающихся.

Инструкция по организации работы с содержанием сборника

В задачнике дается теоретический материал по теме «Теорема Менелая» и представлены планиметрические и стереометрические задачи, решение которых очень подробно описано и проанализировано с соответствующими комментариями и замечаниями.

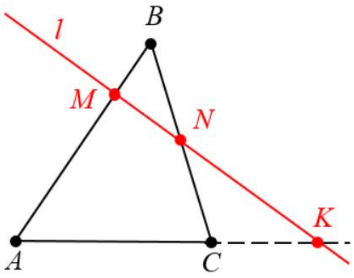
В сборнике, в разделе «Приложение», предложены задачи для самостоятельного решения (18 планиметрических и 20 стереометрических задач, всего 38 задач).

Все задачи, предложенные для самостоятельного решения, снабжены ответами. К каждой задаче указан источник. В ключах с ответами приведены номера-ссылки на задачи (548427), по которым на сайте https://math-ege.sdamgia.ru можно открыть полное решение, что позволяет обучающемуся проводить самоконтроль правильности выполнения задания: можно самостоятельно контролировать процесс обучения, проверяя и оценивая работу по готовым ответам, сверяя решения с разобранными примерами. Кроме того, учителя могут выполнить проверку правильности выполнения работы и оказать обучающемуся своевременную помощь.

Так как методических рекомендаций, разработок и образцов педагогической практики, помогающих учителю математики качественно реализовать указанное направление на своем предметном материале, явно недостаточно, то предлагаемый сборник определенным образом восполняет этот пробел.

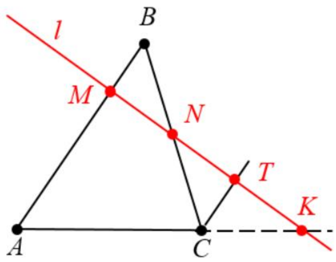
Чертежи к задачам выполнены автором сборника Бурлаковой И.В. в программе "Живая математика" (кроме задач № 8, 9 и 13).

2. Теорема Менелая



Пусть прямая $\boldsymbol{l}$ пересекает треугольник ABC, причем M - это точка ее пересечения со стороной AB, N - точка ее пересечения со стороной BC и K - точка ее пересечения с продолжением стороны AC. Тогда имеет место соотношение: $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CK}{KA} = 1$

Доказательство:



1. Дополнительное построение: прямая $CT \parallel AB$, причём, T – точка пересечения CT с прямой $\boldsymbol{l}$

2)$\varDelta AMK \sim \varDelta CTK$ по двум углам

(∠CKT −общий, ∠KAB = ∠KCT −как соответственные при параллельных прямых AB и CT и секущей AK).

Следовательно: $\frac{AM}{CT} = \frac{MK}{TK} = \frac{AK}{CK}$. Значит $CT = \frac{AM \cdot CK}{AK}$

3)$\varDelta BMN \sim \varDelta CTN$ по двум углам ($\angle MNB = \angle CTN$ −как вертикальные, $\angle MBN = \angle$CTN −как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CT и секущей BC).

Следовательно: $\frac{BM}{CT} = \frac{MN}{TN} = \frac{BN}{CN}$. Значит $CT = \frac{BM \cdot CN}{BN}$

4) $CT = \frac{AM \cdot CK}{AK} = \frac{BM \cdot CN}{BN}$.

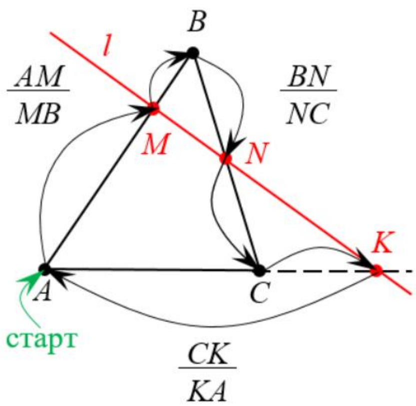
Отсюда получаем: $AM \cdot CK \cdot BN = AK \cdot BM \cdot CN$,

или $\frac{AM \cdot CK \cdot BN}{AK \cdot BM \cdot CN} = 1$. Значит $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CK}{KA} = 1$, ч.т.д.

Схема, позволяющая запомнить теорему Менелая:

если для старта выбрать другую вершину или от выбранной точки пойти в другом направлении, то изменится только последовательность дробей;

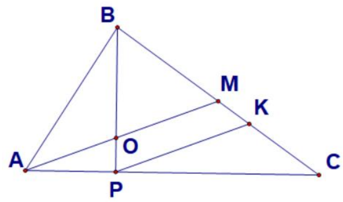
если же прямая $\boldsymbol{l}$ проходит через вершину треугольника, то теорема не работает.



3. Применение теоремы Менелая на планиметрических задачах.

Рассмотрим задачи ОГЭ, ЕГЭ и олимпиад, в которых теорема Менелая используется совместно с другими геометрическими теоремами: подобием, теоремой Фалеса, свойством биссектрисы.

№1. Точка P лежит на стороне AC треугольника ABC, причём AP:PC=1:3. Найти, в каком отношении медиана AM делит отрезок BP.



Решение 1. (без применения теоремы Менелая) Пусть O - точка пересечения AM и BP. Проведем через точку P прямую PK параллельно AM.

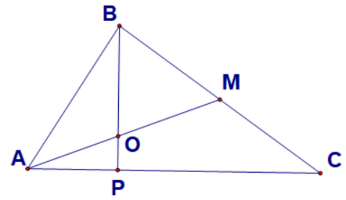
Тогда две параллельные прямые PK и AM пересекают стороны угла ACB, так что по теореме Фалеса имеем отношения AP:PC=MK:KC=1:3.

Тогда MK=1 часть, CM=BM= 4 части и по теореме Фалеса для ΔBPK: PO:OB=KM:MB=1:4.

Ответ: 1:4.

Решение несложное, но нужно догадаться сделать дополнительное построение, а это искусственный приём. Хотелось бы решить задачу, следуя определённому алгоритму. Этот алгоритм и даёт теорема Менелая.

Решение 2. По теореме Менелая для ΔPBC и прямой AM имеем:



$$\frac{PO}{OB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CA}{AP}=1\Rightarrow\frac{PO}{OB}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{4}{1}=1\Rightarrow\frac{PO}{OB}=\frac{1}{4}.$$

Дополнительный вопрос: чему равно отношение площадей треугольников AOP и MOB?

$\frac{S_{AOP}}{S_{MOB}}=\frac{0{,}5AO\cdot OP\cdot\sin\varphi}{0{,}5BO\cdot OM\cdot\sin\varphi}=\frac{AO\cdot OP}{BO\cdot OM}$. Нужно найти отношение AO:OM.

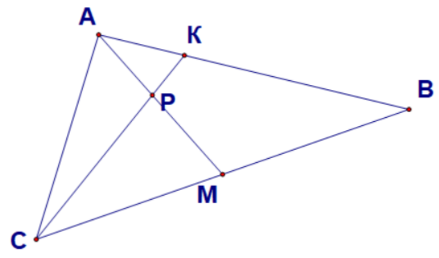
В этом снова поможет теорема Менелая, для ΔAMC и прямой BP, имеем:

$$\frac{AO}{OM}\cdot\frac{MB}{BC}\cdot\frac{CP}{PA}=1\Rightarrow\frac{AO}{OM}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1}=1\Rightarrow\frac{AO}{OM}=\frac{2}{3}.$$

Тогда $\frac{S_{AOP}}{S_{MOB}}=\frac{AO\cdot OP}{BO\cdot OM}=\frac{AO\cdot OP}{OM\cdot BO}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$.

№2. (Олимпиадада 2012г, 9 кл).

Точка K лежит на стороне AB треугольника ABC. Отрезок CK пересекает медиану AM треугольника в точке P, причём AP=AK. Найти отношение BK:PM.



Решение.

По теореме Менелая для ΔABM и прямой CK имеем:

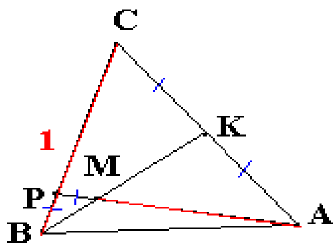
$\frac{BK}{KA}\cdot\frac{AP}{PM}\cdot\frac{MC}{CB}=1$, т.к. $KA=AP=a, CB=2MC$, то получим: $\frac{BK}{a}\cdot\frac{a}{PM}\cdot\frac{MC}{2MC}=1$,

$$\frac{BK}{1}\cdot\frac{1}{PM}\cdot\frac{1}{2}=1, \frac{BK}{PM}=\frac{2}{1}=2.$$

Ответ: BK:PM= 2.

№3. (ОГЭ)

В треугольнике ABC проведена медиана BK, точка P находится на отрезке BC. Отрезки BK и AP пересекаются в точке M, причём BP = MP, длина BC = 1. Найти длину отрезка AM

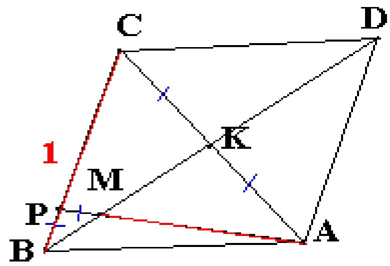


Решение. (1-й способ).

Достроим треугольник ABC до параллелограмма ABCD так, чтобы AC была его диагональю.

ΔPBM – равнобедренный, $\angle PBM=\angle AMK$- как вертикальные, $\angle PBM=\angle ADK$- как накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей BD.

Поэтому ΔAMD – равнобедренный. Таким образом, получим AM=AD=BC=1.



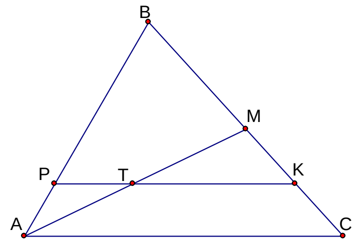
Решение. (2-й способ).

По теореме Менелая для ΔACP и прямой BK имеем:

$\frac{AK}{KC}\cdot\frac{CB}{BP}\cdot\frac{PM}{MA}=1$. По условию AK = KC и BP = PM, поэтому CB = MA = 1.

Ответ: AM=1.

№4. (Олимпиада, 8 кл). В треугольнике ABC проведена прямая, параллельная стороне AC. Эта прямая пересекает сторону AB в точке P, медиану AM – в точке T, а сторону BC в точке K. Найти длину AC, если PT=3, TK=5.



Решение. По теореме Менелая для ΔPKB и прямой AM имеем $\frac{PT}{TK}\cdot\frac{KM}{MB}\cdot\frac{BA}{AP}=1$. (*)

PK||AC, тогда из подобия треугольников ABC и PBK следует, что

$$\frac{AB}{BP}=\frac{BC}{BK}=\frac{AC}{PK}=k,$$

$$\frac{KM}{MB}=\frac{BK-MB}{MB}=\frac{BK}{MB}-1=\frac{BK}{0{,}5BC}-1=\frac{1}{0{,}5k}-1=\frac{2-k}{k},$$

$$\frac{AB}{AP}=\frac{BA}{BA-BP};\ \frac{AP}{AB}=\frac{BA-BP}{BA}=1-\frac{BP}{AB}=1-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k}\ \Longrightarrow \frac{AB}{AP}=\frac{k}{k-1},$$

$$\frac{PT}{TK}=\frac{3}{5}$$

Подставим в (*), получим

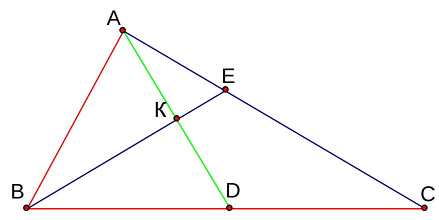
$$\frac{3}{5}\cdot\frac{2-k}{k}\cdot\frac{k}{k-1}=1;\ 6-3k=5k-5;\ k=\frac{11}{8}$$

значит, $AC=\frac{11}{8}PK=\frac{11}{8}\cdot 8=11.$

Ответ: AC=11.

№5. (ОГЭ, Тип 25 № 339507)

В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 28. Найдите стороны треугольника ABC.



Для решения задачи можно выполнить дополнительные построения и далее, либо из подобия, либо через нахождение площадей, найти стороны треугольника. Однако решение задачи с помощью свойства биссектрисы и теоремы Менелая не требует никаких дополнительных построений. Оно гораздо проще и рациональнее.

Решение.

ΔBAD - равнобедренный, потому что биссектриса BK перпендикулярна основанию AD.

AK = KD = 14.

Это означает, что AB = BD = BC/2.

Поскольку BE – биссектриса, то по её свойству $\frac{AE}{AB}=\frac{EC}{BC}$ =>AE = EC/2, a значит, AE=AC/3.

По теореме Менелая для ΔBEC и прямой AD имеем

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CA}{AE}\cdot\frac{EK}{KB}=1\Rightarrow\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{EK}{KB}=1\Rightarrow BK=3KE.$$

Но KE + BK=28, отсюда BK = 21; KE = 7.

По теореме Пифагора для ΔAKB: $AB=\sqrt{14^2+21^2}=7\sqrt{13}\Rightarrow BC=14\sqrt{13}$.

По теореме Пифагора для ΔAKE: $AE=\sqrt{14^2+7^2}=7\sqrt{5}\Rightarrow AC=21\sqrt{5}$.

Ответ: AB = 7√13; BC=14√13; AC = 21√5.

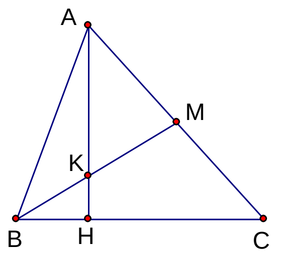
№6. (Олимпиада, 2016).

В треугольнике ABC высота AH равна 30, медиана BM равна 25, расстояние от точки пересечения отрезков BM и AH до стороны BC равно 6.

а) Докажите, что BH : CH =1 : 3.

б) Найдите площадь треугольника AMB.

Решение.



а) По теореме Менелая для ΔACH и прямой BM имеем

$$\frac{AK}{KH}\cdot\frac{HB}{BC}\cdot\frac{CM}{MA}=1\Rightarrow\frac{24}{6}\cdot\frac{HB}{BC}\cdot\frac{1}{1}=1\Rightarrow\frac{HB}{BC}=\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{HB}{HC}=\frac{1}{3}.$$

б) По теореме Менелая для ΔBCM и прямой KH имеем

$$\frac{BK}{KM}\cdot\frac{MA}{AC}\cdot\frac{CH}{HB}=1\Rightarrow\frac{BK}{KM}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{1}=1\Rightarrow\frac{BK}{KM}=\frac{2}{3}.$$

Так как BM=25, то BK=10, BM=15.

По теореме Пифагора BH=8, тогда CH=24, а BC=32.

Из ΔKHB $\sin\angle HBK=\frac{KH}{BK}=0{,}6$.

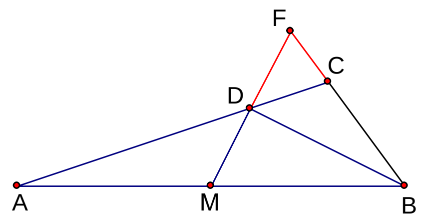
$$S_{\Delta AMB}=S_{\Delta BMC}=\frac{1}{2}BC\cdot BM\sin\angle MBC=\frac{1}{2}\cdot 32\cdot 25\cdot 0{,}6=240.$$

Ответ: 240.

№7. (Олимпиада, 10 класс).

В треугольнике ABC точка M — середина стороны AB, BD — биссектриса угла ∠ABC, D лежит на AC. Известно, что ∠BDM=90°. Найдите отношение AB:BC.

Решение. Продолжим прямую MD до пересечения с BC в точке F. В ΔMBF BD – биссектриса и высота, а, значит, и медиана, то есть BM=BF. CF=BF- BC.



По теореме Менелая для ΔABC и прямой MF

имеем $\frac{BM}{MA}\cdot\frac{AD}{DC}\cdot\frac{CF}{FB}=1$. (*)

Так как M – середина AB, то BM=MA.

BD — биссектриса угла B, тогда по свойству биссектрисы: $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$.

Для третьей дроби $\frac{CF}{FB}=\frac{BM-BF}{BM}=\frac{BM-BC}{BM}=1-\frac{2BC}{AB}$.

Из (*) получим $\frac{BM}{MA}\cdot\frac{AD}{DC}\cdot\frac{CF}{FB}=1\cdot\frac{AB}{BC}\cdot\left(1-\frac{2BC}{AB}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{AB}{BC}=3$.

Ответ: AB:BC=3:1.

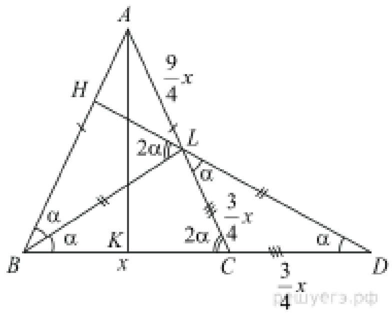
№8 (Типовые тестовые задания по математике, под редакцией И. В. Ященко 2016, **№16)**

На отрезке *BD* взята точка *C*. Биссектриса *BL* равнобедренного треугольника *ABC* с основанием *BC* является боковой стороной равнобедренного треугольника *BLD* с основанием *BD*.

а) Докажите, что треугольник *DCL* равнобедренный.

б) Известно, что $cos\angle ABC=\frac{1}{6}$. В каком отношении прямая *DL* делит сторону *AB*?

Решение.



а) ΔABC – равнобедренный с основанием *BC*, пусть $\angle ABC=\angle ACB=2\alpha$, тогда в равнобедренном ΔLBD - $\angle LBD=\angle LDB=\alpha$ (как углы при основании *BD*).

$\angle BCL$ - внешний угол ΔLCD, значит

$\angle BCL=\angle LDC+\angle DLC$.

Поэтому $\angle CLD=\alpha$, и, следовательно, ΔLCD – равнобедренный, ч.т.д.

б) Пусть $BC=x$, а *AK*—медиана и высота равнобедренного ΔABC.

Тогда в прямоугольном ΔAKB имеем:

$$BK=\frac{x}{2}, COS\angle ABK=\frac{1}{6} \Longrightarrow AB=AC=\frac{BK}{COS\angle ABK}=3x$$

Биссектриса *BL* делит сторону, к которой она проведена, на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам: $\frac{AL}{LC}=\frac{AB}{BC}=\frac{3}{1}$.

Поскольку $AC=3x,$ получаем: $LC=\frac{1}{4}AC=\frac{3}{4}x$.

В пункте а) было доказано, что ΔLCD равнобедренный, поэтому

$CD=LC=\frac{3}{4}x$.

Применим теорему Менелая к $\Delta\, ABC$ и прямой DH:

$$\frac{AH}{HB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CL}{LA}=1,\qquad \frac{AH}{HB}\cdot\frac{7x}{3x}\cdot\frac{1}{3}=1,\qquad \frac{AH}{HB}\cdot\frac{7}{9}=1,\qquad \frac{AH}{HB}=\frac{9}{7}.$$

Ответ: 9 : 7 (или 7 : 9).

4. Применение теоремы Менелая в стереометрических задачах.

№9 (Решу ЕГЭ, Задание 14 № 548403)

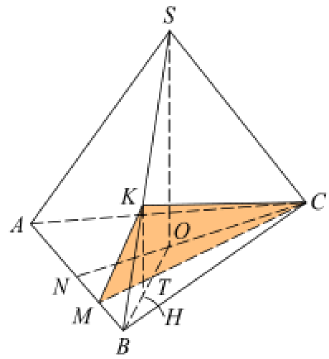
Дана правильная треугольная пирамида *SABC* в которой *AB* = 9, точка *M* лежит на ребре *AB* так, что *AM* = 8. Точка *K* делит сторону *SB* так, что *SK* : *KB* = 7 : 3.

Ребро $SA=\sqrt{43}.$ Точки *M* и *K* принадлежат плоскости α, которая перпендикулярна плоскости *ABC*.

а) Докажите, что точка *C* принадлежит плоскости α.

б) Найдите площадь сечения α.

Решение.



а) Пусть *SO* высота пирамиды, а *KH* — перпендикуляр, проведенный из *K* к плоскости *ABC*. Очевидно, что основание перпендикуляра *H* — проекция точки *K*, лежит на *BO* —проекции *BS*. Докажем, что *M*, *H* и *C* лежат на одной прямой.

Пусть *MC* пересекает *BO* в точке *T*, и пусть

N — середина *AB*. Запишем теорему Менелая для Δ*BNO* и прямой *CM*.

$\frac{BM}{MN}\cdot\frac{NC}{CO}\cdot\frac{OT}{TB}=1,$ тогда $\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{OT}{TB}=1.$

Из последнего соотношения получаем: *OT* : *TB* = 7 : 3.

Но *OH* : *HB* = *SK* : *KB* = 7 : 3.

Значит,точки *H* и *T* совпадают. Следовательно, *CM* пересекает *BO* в точке *H*.

Плоскость *KMC* содержит *KH*, которая перпендикулярна *ABC*, таким образом, плоскости *KMC* и *ABC* перпендикулярны. Поэтому плоскость α проходит через точку *C*.

б) Заметим, что $KH=\frac{3}{10}SO=\frac{3}{10}\sqrt{SA^2-AO^2}=\frac{6}{5}.$

Вычислим *CM* при помощи теоремы косинусов:

$$CM^2=9^2+1^2-2\cdot9\cdot1\cdot COS60°=73.$$

Поэтому площадь треугольника *CKM* равна $S=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\sqrt{73}=\frac{6\sqrt{73}}{10}.$

Ответ: б) $\frac{6\sqrt{73}}{10}$

№10 (Типовые тестовые задания по математике, под редакцией И. В. Ященко 2018 г)

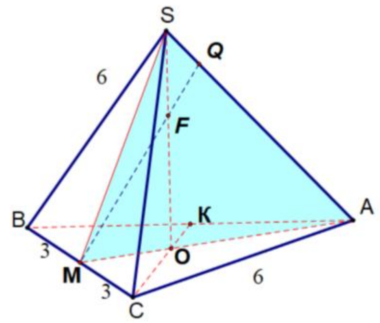
Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ в которой все рёбра равны 6, точка M – середина ребра BC, точка О – центр основания пирамиды, точка F делит отрезок SO в отношении 1:2, считая от вершины пирамиды.

а) Найдите отношение, в котором плоскость CMF делит отрезок SA, считая от вершины.

б) Найдите угол между плоскостью MCF и плоскостью ABC.

Решение.

а) MF принадлежит плоскости SMA, значит MF пересекает SA в точке Q.



Запишем теорему Менелая для треугольника SAO и прямой MQ:

$$\frac{SQ}{QA}\cdot\frac{AM}{MO}\cdot\frac{OF}{FS}=1\ (*).$$

Найдём $AM, MO, OF, FS:$

Из прямоугольного ΔAMC: $AM=\sqrt{6^2-3^2}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$.

В равностороннем ΔABC- AM – медиана, значит $MO=\frac{1}{3}AM=\sqrt{3}$,

$$AO=\frac{2}{3}AM=2\sqrt{3}$$

Из прямоугольного ΔSAO:

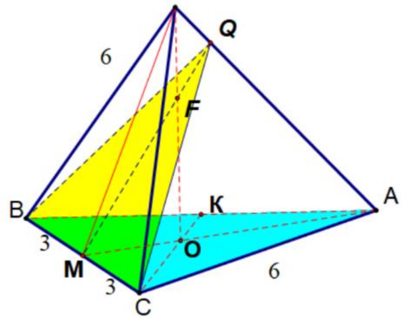
$$SO=\sqrt{SA^2-AO^2}=\sqrt{6^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{36-12}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

$$FS=\frac{1}{3}SO=\frac{2\sqrt{6}}{3},\qquad OF=\frac{2}{3}SO=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

Тогда из (*) получим:

$$\frac{SQ}{QA}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2\sqrt{6}\cdot 3}{3\cdot 4\sqrt{6}}=1,\qquad \frac{SQ}{QA}\cdot 3\cdot 2=1,\qquad \frac{SQ}{QA}=\frac{1}{6}.$$

б) Найти угол между плоскостью MCF и плоскостью ABC



$$\angle(MCF;ABC)=\angle(BCQ;ABC)=\angle QMA=\angle FMO=\alpha$$

$$\varDelta FMO: tg\alpha=\frac{FO}{OM}=\frac{4\sqrt{6}}{3\cdot\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\alpha=arctg\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Ответ: б) $arctg\frac{4\sqrt{2}}{3}$

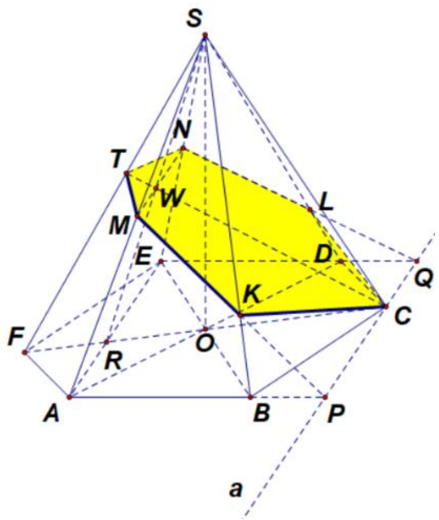
№11. (Решу ЕГЭ № 513280, Типовые тестовые задания по математике, под редакцией И. В. Ященко 2016**)**

В правильной шестиугольной пирамиде *SABCDEF* с вершиной *S* боковое ребро вдвое больше стороны основания.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер *SA* и *SE* и вершину *C*, делит ребро *SB* в отношении 3 : 1, считая от вершины *S*.

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер *SA* и *SE* и вершину *C*, делит ребро *SF*, считая от вершины *S*.

Решение.

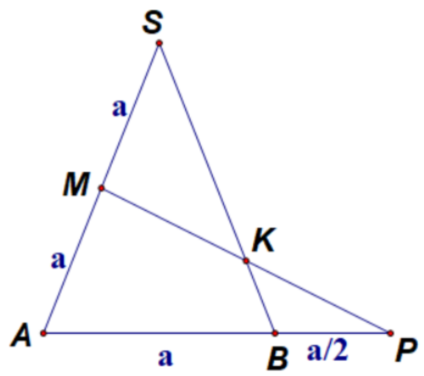


а) Обозначим середины ребер *SA* и *SE* за *M* и *N* соответственно. Тогда *MN* || *AE* || *BD*.

Проведем через точку *C* прямую ***a***, параллельную *AE* (она будет лежать в плоскости сечения), тогда она пересечет *AB* в точке *P*.

По свойствам правильного шестиугольника *AB* =2*BP*.

Пусть теперь *K* точка пересечения прямой *MP* с *SB*.



По теореме Менелая для Δ *ASB* и прямой *MKP* имеем

$$\frac{SM}{MA}\cdot\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BK}{KS}=1, \qquad \frac{a}{a}\cdot\frac{1{,}5a}{0{,}5a}\cdot\frac{BK}{KS}=1,$$

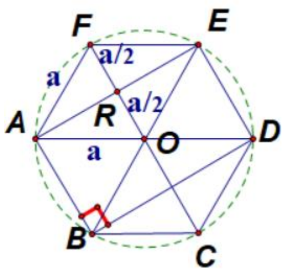
то есть

$$\frac{BK}{KS}=\frac{1}{3}$$

И значит *SK* : *KB* = 3 : 1.

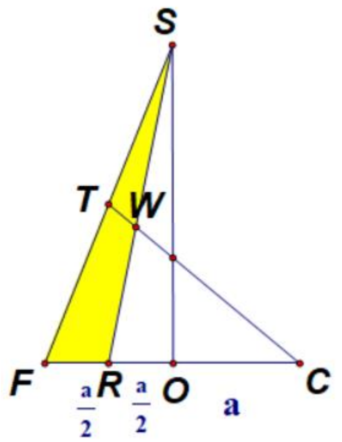
б) Опустим из *S* перпендикуляр на *AE*. Он упадет в середину *AE* — точку *R*.

По свойствам правильного шестиугольника *CR* : *RF* = 3 : 1.



При этом отрезок *MN* пересекает *SR* в его середине *W*.

Пусть *CW* пересекает *SF* в точке *T*, это и есть точка пересечения плоскости сечения с ребром *CF*.



По теореме Менелая для Δ*FSR* и прямой *TWC* имеем

$$\frac{ST}{TF}\cdot\frac{FC}{CR}\cdot\frac{RW}{WC}=1, \quad \frac{ST}{TF}\cdot\frac{2a}{1{,}5a}\cdot\frac{1}{1}=1,$$

Откуда

$$\frac{ST}{TF} = \frac{1{,}5a}{2a} = \frac{3}{4}$$

То есть $SG : GF = 3 : 4$.

Ответ: 3 : 4.

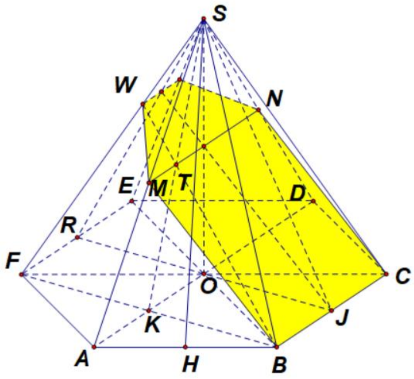
№12. (Решу ЕГЭ № 513266, Типовые тестовые задания по математике, под редакцией И. В. Ященко 2016**)**

Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C, делит апофему грани ASB в отношении 2 : 1, считая от вершины S.

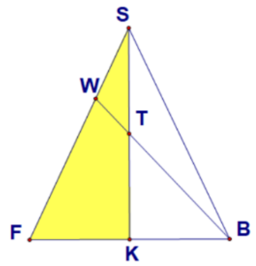
б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C, делит ребро SF, считая от вершины S.

Решение



а)Пусть M, N середины ребер SA и SD. Поскольку MN — средняя линия треугольника SAD, то $MN \parallel AD \parallel BC$, поэтому точка B также лежит в данной плоскости. Поэтому с гранью ABS данная плоскость пересекается по прямой BM — медиане ΔSAB. Она делит его медиану SH (H — середина AB) в отношении 2 : 1 считая от вершины.

б) Пусть $AD \cap BF = K, SK \cap MN = T$. Поскольку MN — средняя линия ΔSAD, она делит отрезок SK пополам, то есть T — середина SK. Ясно, что T лежит в данной плоскости.



Рассмотрим ΔSBF, где SK - медиана и T - ее середина. В данной плоскости лежит прямая BT, пересекающая SF в точке W. Осталось выяснить местоположение точки W.

Напишем теорему Менелая для ΔFSK и прямой WB:

$$\frac{FW}{WS} \cdot \frac{ST}{TK} \cdot \frac{KB}{BF} = 1,$$

откуда

$$\frac{FW}{WS} = \frac{2}{1},$$

а значит

$$\frac{SW}{WF} = \frac{1}{2}$$

Ответ: 1 : 2.

№13. (Экзаменационные варианты ЕГЭ 2019-2020 г., Решу ЕГЭ № 548403)

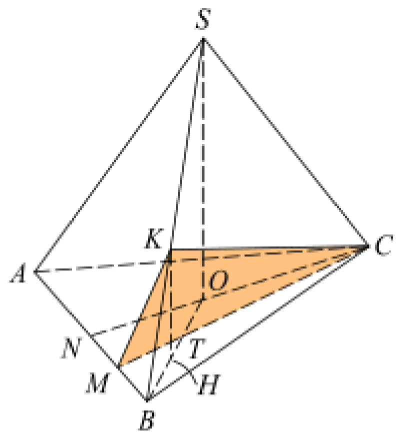
Дана правильная треугольная пирамида *SABC* в которой *AB* = 9, точка *M* лежит на ребре *AB* так, что *AM* = 8. Точка *K* делит сторону *SB* так, что *SK* : *KB* = 7 : 3. Ребро $SA = \sqrt{43}$. Точки *M* и *K* принадлежат плоскости α, которая перпендикулярна плоскости *ABC*.

а) Докажите, что точка *C* принадлежит плоскости α.

б) Найдите площадь сечения α.

Решение.

а) Пусть *SO* высота пирамиды, а *KH* — перпендикуляр, проведенный из *K* к плоскости *ABC*. Очевидно, что основание перпендикуляра *H* — проекция точки *K*, лежит на *BO* — проекции *BS*. Докажем, что *M*, *H* и *C* лежат на одной прямой. Пусть *MC* пересекает *BO* в точке *T*, и пусть *N* — середина *AB*.



В равностороннем Δ*ABC* точка О – точка пересечения медиан, биссектрис и высот, значит:

$$\frac{CO}{ON} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{NC}{CO} = \frac{3}{2},$$

$$CN = \sqrt{CB^2 - BN^2} = \sqrt{9^2 - (4{,}5)^2} = \sqrt{4{,}5 \cdot 13{,}5} = \sqrt{(4{,}5)^2 \cdot 3} = 4{,}5\sqrt{3},$$

$$CO = AO = BO = \frac{2}{3}CN = \frac{2}{3} \cdot 4{,}5\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

Запишем теорему Менелая для треугольника *BNO* и прямой *CM*:

$$\frac{BM}{MN} \cdot \frac{NC}{CO} \cdot \frac{OT}{TB} = 1, \text{тогда } \frac{1}{3{,}5} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{OT}{TB} = 1, \text{откуда } \frac{OT}{TB} = \frac{7}{3}$$

Но *OH* : *HB* = *SK* : *KB* = 7 : 3. Значит, точки *H* и *T* совпадают. Следовательно, *CM* пересекает *BO* в точке *H*. Плоскость *KMC* содержит *KH*, которая перпендикулярна *ABC*, таким образом, плоскости *KMC* и *ABC* перпендикулярны. Поэтому плоскость α проходит через точку *C*.

б) Заметим, что

$$KH = \frac{3}{10}SO = \frac{3}{10}\sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{3}{10}\sqrt{\left(\sqrt{43}\right)^2 - \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3}{10}\sqrt{16} = \frac{6}{5}.$$

Вычислим *CM* при помощи теоремы косинусов для Δ *CMB*:

$$CM^2 = BM^2 + BC^2 - 2 \cdot BM \cdot BC \cdot COS\angle MBC,$$
$$CM^2 = 1^2 + 9^2 - 2 \cdot 1 \cdot 9 \cdot COS60° = 73.$$

Поэтому площадь треугольника *CKM* равна

$$S = \frac{1}{2} \cdot KH \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \sqrt{73} = \frac{3\sqrt{73}}{5}.$$

Ответ: б) $\frac{3\sqrt{73}}{5}$

№14 ((Экзаменационные варианты ЕГЭ 2021 - 2022г, Краснодарский край)

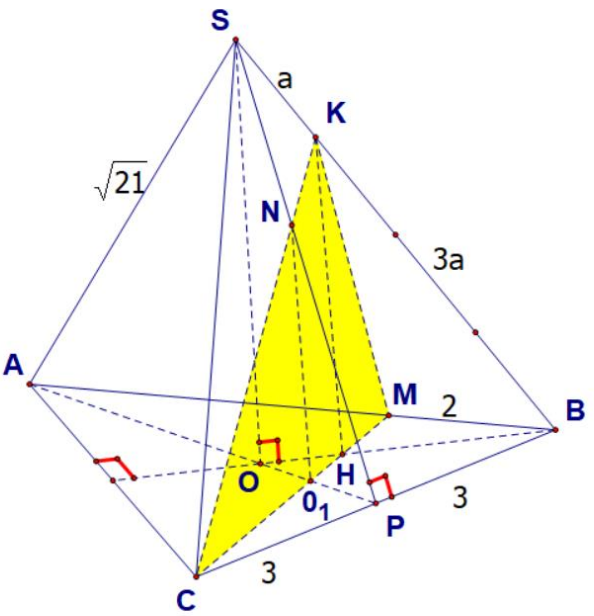
В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $\sqrt{21}$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём AM = 4, SK : KB =1:3.

а) Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC.

б) Найдите объём пирамиды BCKM.

Решение.

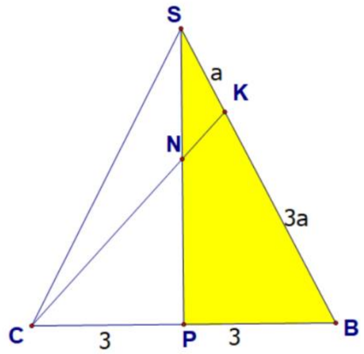
а) Пусть прямые AP и CM пересекаются в точке O_1, SO – высота пирамиды. Так как пирамида правильная, то центр правильного треугольника ABC совпадает с точкой O. Следовательно, SO лежит в плоскости SAP.



Пусть CK пересекает апофему SP в точке N.

Докажем, что NO_1 перпендикулярно плоскости ABC, тогда и плоскость CKM будет перпендикулярна плоскости ABC.

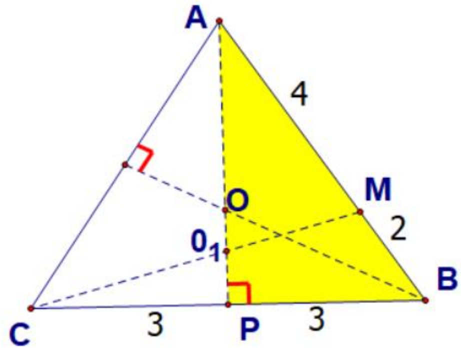
Запишем теорему Менелая для ΔSPB и прямой CNK:



$$\frac{SK}{KB}\cdot\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PN}{NS}=1, \text{тогда } \frac{a}{3a}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{PN}{NS}=1, \text{откуда}$$

$$\frac{PN}{NS}=\frac{3}{2}\Longrightarrow PN=\frac{3}{5}SP$$

Запишем теорему Менелая для ΔAPB и прямой CO_1M:

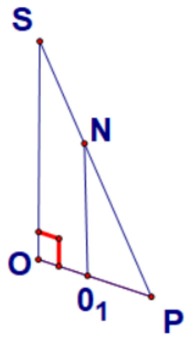


$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BC}{CP}\cdot\frac{PO_1}{O_1A}=1, \text{тогда } \frac{4}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{PO_1}{O_1A}=1, \text{откуда}$$

$$\frac{PO_1}{O_1A}=\frac{1}{4}\Longrightarrow PO_1=\frac{1}{5}AP=\frac{1}{5}\cdot 3\cdot OP=\frac{3}{5}OP\Longrightarrow$$

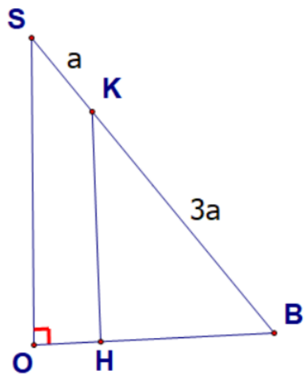
$$\frac{PO_1}{O_1O}=\frac{3}{2}$$

В ΔSPO:



$\frac{PO_1}{O_1O}=\frac{PN}{NS}=\frac{3}{2}\Longrightarrow NO_1\parallel SO$ - по теореме, обратной теореме Фалеса, а значит $NO_1\perp OP\Rightarrow(CKM)\perp(ABC)$, ч.т.д.

б) $V_{BCKM}=\frac{1}{3}\cdot S_{BCM}\cdot KH,$ где $KH\parallel NO_1\Rightarrow KH\perp(ABC)$.



Т.к.$KH\parallel NO_1$, то в $\triangle SOP$ $KH\parallel SO$ $\Longrightarrow$

$$\frac{KH}{SO}=\frac{BK}{BS}=\frac{3}{4}$$

Из прямоугольного ΔAPC:

$$AP=\sqrt{AC^2-CP^2}=\sqrt{6^2-3^2}=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}=3\sqrt{3};$$

$$AO=BO=\frac{2}{3}AP=\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3}=2\sqrt{3};$$

Из прямоугольного ΔSBO:

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{\left(\sqrt{21}\right)^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{21 - 12} = \sqrt{9} = 3;$$

$$\frac{KH}{3} = \frac{3}{4}, KH = \frac{9}{4}.$$

Найдём площадь $\triangle BCM$:

$$S_{BCM} = \frac{1}{2} \cdot MB \cdot BC \cdot sin60° = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

$$V_{BCKM} = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Приложение.
Теорема Менелая. Задачи для самостоятельного решения.

Образовательный портал «РЕШУ ЕГЭ» (https://math-ege.sdamgia.ru)
Вариант №50092495

Вариант составлен из задач сайта Решу ЕГЭ. Ко всем задачам есть ответы. Также по номеру варианта (№50092495) на сайте https://math-ege.sdamgia.ru можно открыть полное решение. Нумерация в приложении соответствует нумерации в варианте на сайте Решу ЕГЭ. Но так как составитель работы (Бурлакова И.В.) сочла необходимым разделить праниметрические и стереометрические задачи в разные разделы, то в приложении нумерация дана **не по порядку**.

Планиметрия

1. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1 и B_1 соответственно, причём $AC_1 : C_1B = 8 : 3$, $BA_1 : A_1C = 1 : 2$, $CB_1 : B_1A = 3 : 1$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D.

а) Докажите, что ADA_1B_1 — параллелограмм.

б) Найдите CD, если отрезки AD и BC перпендикулярны, $AC = 28$, $BC = 18$.

Ответ: б) 17.

Источник: ЕГЭ по математике 10.07.2020. Основная волна. Санкт-Петербург, Задания 16 ЕГЭ–2020

3. На отрезке BD взята точка C. Биссектриса BL равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является боковой стороной равнобедренного треугольника BLD с основанием BD.

а) Докажите, что треугольник DCL равнобедренный.

б) Известно, что $\cos\angle ABC = \frac{3}{4}.$ В каком отношении прямая DL делит сторону AB?

Ответ: 21 : 4 (или 4 : 21).

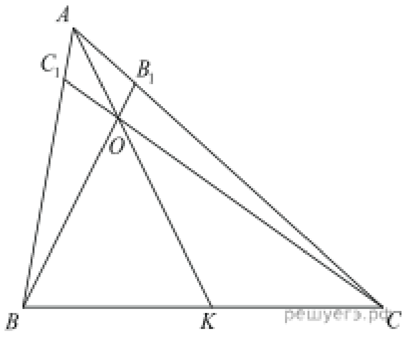
Источник: Типовые тестовые задания по математике, под редакцией И. В. Ященко 2016

5. Точки B_1 и C_1 лежат на сторонах соответственно AC и AB треугольника ABC, причём $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B$. Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O.

а) Докажите, что прямая AO делит пополам сторону BC.

б) Найдите отношение площади четырёхугольника AB_1OC_1 к площади треугольника ABC, если известно, что $AB_1 : B_1C = AC_1 : C_1B = 1 : 4$.

Ответ: 1 : 15.



Источник: Типовые тестовые задания по математике, под редакцией И. В. Ященко 2017. Вариант 3. (Часть С)., Типовые тестовые задания по математике под редакцией И. В. Ященко, 2017. Задания С2, С4.

6. На отрезке *BD* взята точка *C*. Биссектриса *BL* равнобедренного треугольника *ABC* с основанием *BC* является боковой стороной равнобедренного треугольника *BLD* с основанием *BD*.

а) Докажите, что треугольник *DCL* равнобедренный.

б) Известно, что $\cos\angle ABC = \frac{1}{6}.$ В каком отношении прямая *DL* делит сторону *AB*?

Ответ: 9 : 7 (или 7 : 9).

Источник: Типовые тестовые задания по математике, под редакцией И. В. Ященко 2016

9. В треугольнике *ABC* на стороне *AB* расположена точка *K* так, что *AK* : *KB* = 3 : 5. На прямой *AC* взята точка *E* так, что *AE* = 2*CE*. Известно, что прямые *BE* и *CK* пересекаются в точке *O*. Найдите площадь треугольника *ABC*, если площадь треугольника *BOC* равна 20.

Ответ: 8 или 72.

Источник: А. Ларин: Тренировочный вариант № 36.

11. Даны треугольники *ABC* и $A_1B_1C_1$. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. Прямые *AB* и A_1B_1 пересекаются в точке C_2. Прямые *AC* и A_1C_1 пересекаются в точке B_2. Прямые *BC* и B_1C_1 пересекаются в точке A_2.

а) Докажите, что точки A_2, B_2, C_2 лежат на одной прямой.

б) Найдите отношение площади треугольника $A_1B_1C_1$ и площади треугольника *ABC*, если высоты треугольника *ABC* равны $2,\ \frac{10}{11},\ \frac{5}{7},$ а высоты треугольника $A_1B_1C_1$ равны $2,\ \frac{5}{3},\ \frac{10}{9}.$

Ответ: б) $\sqrt{3}.$

Источник: А. Ларин: Тренировочный вариант № 134.

13. На сторонах *AD* и *BC* параллелограмма *ABCD* взяты соответственно точки *M* и *N*, причем $BN : NC = 1 : 3$. Оказалось, что прямые *AN* и *AC* разделили отрезок *BM* на три равные части.

а) Докажите, что точка *M* — середина стороны *AD* параллелограмма.

б) Найдите площадь параллелограмма *ABCD*, если известно, что площадь четыр ехугольника, ограниченного прямыми *AN*, *AC*, *BM* и *BD* равна 16.

Ответ: 240.

Источник: А. Ларин: Тренировочный вариант № 152.

14. В треугольнике *ABC* на сторонах *AB* и *AC* отмечены точки C_1 и B_1 соответственно, причем $BC_1 : AC_1 = 1 : 3,\ AB_1 : CB_1 = 2 : 5.$ Прямые BB_1 и CC_1 пересекаются в точке *O*.

а) Докажите, что площадь треугольника *BOC* в десять раз больше площади треугольника BOC_1.

б) Найдите площадь четырехугольника AB_1OC_1, если площадь треугольника B_1OC равна 150.

Ответ: 81.
Источник: А. Ларин: Тренировочный вариант № 179.

18. Окружность, построенная на стороне BC треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно.
Прямые CM и BN пересекаются в точке P. Точка O — середина AP.

а) Докажите, что треугольник OMN равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника OMN, если известно, что $AM = 3, BM = 9, AN = 4$.

Ответ: $\frac{17\sqrt{2}}{16}$.
Источник: А. Ларин. Тренировочный вариант № 263.

19. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точки M и N — середины катетов AC и BC соответственно, CH — высота.

а) Докажите, что прямые MH и NH перпендикулярны.

б) Пусть P — точка пересечения прямых AC и NH, а Q — точка пересечения прямых BC и MH. Найдите площадь треугольника PQM, если $AH = 12$ и $BH = 3$.

Ответ: б) 50.
Источник: ЕГЭ по математике 06.06.2016. Основная волна. Вариант 601 (С часть).

20. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C точки M и N — середины катетов AC и BC соответственно, CH — высота.

а) Докажите, что прямые MH и NH перпендикулярны.

б) Пусть P — точка пересечения прямых AC и NH, а Q — точка пересечения прямых BC и MH. Найдите площадь треугольника PQM, если $AH = 4$ и $BH = 2$.

Ответ: б) $18\sqrt{2}$.
Источник: Задания 16 (С4) ЕГЭ 2016, ЕГЭ по математике 06.06.2016. Основная волна. Вариант 605 (С часть).

30. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и P, приче м $AE:EP:PC = 1:2:1$. Прямые DE и DP пересекают стороны AB и BC в то чках K и M соответственно.

А) Докажите, что KM параллельна AC.

Б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если известно, что площадь п ятиугольника $BKEPM$ равна 30.

Ответ: б) 72.
Источник: А. Ларин: Тренировочный вариант № 171.

31. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Точка P — середина стороны AF, точка K — середина стороны AB.

а) Докажите, что площади четырехугольников $DPFE$ и $DPAK$ равны.

б) Найдите площадь общей части четырехугольников $DPAK$ и $DEAC$, если известно, что $AB = 6$.

Ответ: $\frac{72\sqrt{3}}{5}$.
Источник: А. Ларин: Тренировочный вариант № 191.

32. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D так, что $BC = \sqrt{AC \cdot CD}$.

а) Докажите, что углы BAD и CBD равны.

б) Найдите отношение отрезков биссектрисы CL треугольника ABC, на которые ее делит прямая BD, если известно, что $BC = 6, AC = 9.$

Ответ: $2.$

Источник: А. Ларин: Тренировочный вариант № 199.

33. Точка N делит диагональ трапеции $ABCD$ в отношении $CN : NA = 2 : 1.$ Длины оснований BC и AD относятся как $1 : 3.$ Через точку N и вершину D проведена прямая, пересекающая боковую сторону AB в точке M.

а) Какую часть площади трапеции составляет площадь четырехугольника $MBCN$?

б) Найдите длину отрезка MN, если $MD = 9.$

Ответ: а) $\frac{7}{32};$ б) 1.

Источник: А. Ларин: Тренировочный вариант № 252.

37. К окружности с диаметром $AB = 10$ проведена касательная BC так что $BC = 5.$ Прямая AC вторично пересекает окружность в точке D. Точка E диаметрально противоположна точке D. Прямые ED и BC пересекаются в точке F.

а) Докажите, что $BD^2 = CD \cdot BE.$

б) Найдите площадь треугольника FBE.

Ответ: б) $\frac{80}{3}.$

Источник: ЕГЭ по математике 25.07.2020. Резервная волна. Вариант 2, Задания 16 ЕГЭ–2020

38. К окружности с диаметром $AB = 6$ проведена касательная BC так, что $BC = 3\sqrt{2}.$ Прямая AC вторично пересекает окружность в точке D. Точка E диаметрально противоположна точке D. Прямые ED и BC пересекаются в точке F.

а) Докажите, что $BD^2 = CD \cdot BE.$

б) Найдите площадь треугольника FBE.

Ответ: б) $12\sqrt{2}.$

Источник: ЕГЭ по математике 25.07.2020. Резервная волна. Вариант 3

Стереометрия

2. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$. Точка M — середина SA, на ребре SB отмечена точка N так, что $SN : NB = 1 : 2.$

а) Докажите, что плоскость CMN параллельна прямой SD.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью CMN, если все рёбра равны 12.

Ответ: б) $15\sqrt{19}.$

Источник: ЕГЭ по математике 02.06.2022. Основная волна. Краснодарский край, Задания 13 ЕГЭ–2022

4. Точки M, N и K принадлежат соответственно ребрам AD, AB и BC тетраэдра $ABCD$, причем $AM : MD = 2 : 3$, $BN : AN = 1 : 2$, $BK = KC$.

а) Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки M, N, K.

б) Найдите отношение, в котором секущая плоскость делит ребро CD.

Ответ: 3:1.

Источник: А. Ларин: Тренировочный вариант № 206.

7. Плоскость α проходит через середины двух противоположных ребер треугольной пирамиды и параллельна медиане одной из ее граней.

а) Докажите, что среди медиан граней этой пирамиды в точности две являются параллельными к плоскости α.

б) Найдите площадь сечения данной пирамиды плоскостью α, если эти медианы перпендикулярны друг другу и равны 2.

Ответ: б) 2.

Источник: А. Ларин. Тренировочный вариант № 345.

8. Объем пирамиды $ABCD$ равен 5. Через середины ребер AD и BC проведена плоскость, пересекающая ребро CD в точке M. При этом $DM : MC = 2 : 3$. Найти площадь сечения, если расстояние от плоскости сечения до вершины A равно 1.

Ответ: 3.

Источник: А. Ларин: Тренировочный вариант № 54.

10. Плоскость пересекает боковые ребра SA и SB треугольной пирамиды $SABC$ в точках K и L соответственно и делит объем пирамиды пополам

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, если $SK : SA = 2 : 3$, $SL : SB = 4 : 5$.

б) В каком отношении эта плоскость делит медиану SN грани SBC?

Ответ: $120 : 19$.

Источник: А. Ларин: Тренировочный вариант № 93.

12. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S боковое ребро вдвое больше стороны основания.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SE и вершину C, делит ребро SB в отношении 3 : 1, считая от вершины S.

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SE и вершину C, делит ребро SF, считая от вершины S.

Ответ: $3 : 4$ $3 : 4$.

Источник: Типовые тестовые задания по математике, под редакцией И. В. Ященко 2016

15. Апофема правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, боковое ребро образует с основанием $ABCD$ угол, равный $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}.$ Точки E, F, K выбраны соответственно на ребрах AB, AD и SC так, что $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FD} = \frac{SK}{KC} = \frac{1}{2}.$

а) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью EFK.

б) Найдите угол между прямой SD и плоскостью EFK.

Ответ: а) $\frac{14\sqrt{5}}{9\sqrt{3}};$ б) $\arcsin\frac{3}{5}.$

Источник: А. Ларин. Тренировочный вариант № 256.

16. В треугольной пирамиде $SABC$ точка E — середина ребра SA, точка F — середина ребра SB, O — точка пересечения медиан треугольника ABC.

а) Докажите, что плоскость CEF делит отрезок SO в отношении 3 : 2, считая от вершины S.

б) Найдите косинус угла между плоскостями CEF и EFT, если точка T — середина SC, пирамида $SABC$ правильная, площадь треугольника ABC равна $27\sqrt{3}$, а $SB = 10$.

Ответ: б) $\frac{15}{17}$.

Источник: А. Ларин. Тренировочный вариант № 323. (часть С).

17. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. Плоскость α параллельна прямой AC, проходит через точку B и середину высоты пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро SD в отношении 2 : 1, считая от точки D.

б) Найдите синус угла между плоскостью α и плоскостью ASC, если угол SAC равен 30°.

Ответ: б) $\frac{2\sqrt{39}}{13}$.

Источник: А. Ларин. Тренировочный вариант № 324. (часть С).

21. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка L — середина бокового ребра SB. На ребре SA взята точка K так, что $SK : KA = 1 : 2$.

а) Докажите, что плоскость DKL параллельна боковому ребру SC.

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью DKL, если все ребра пирамиды равны 24.

Ответ: б) $60\sqrt{19}$.

Источник: А. Ларин. Тренировочный вариант № 402.

22. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S, точка M — середина ребра BS. Найдите площадь сечения, проведенного через прямую AM параллельно одной из диагоналей основания, указанная диагональ не принадлежит сечению. Стороны основания пирамиды равны $6\sqrt{2}$, а высота пирамиды равна 9.

Ответ: 30.

Источник: А. Ларин: Тренировочный вариант № 19.

23. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка K является серединой ребра SD, а точка L — серединой стороны BC основания $ABCD$. Плоскость AKL пересекает ребро SC в точке N.

а) Докажите, что $SN : NC = 2 : 1$.

б) Найдите угол между плоскостями AKL и ABC, если $AB = 10$, а высота пирамиды равна 20.

Ответ: б) $\operatorname{arctg} \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Источник: А. Ларин. Тренировочный вариант № 386.

24. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$ в которой $AB = 9$, точка M лежит на ребре AB так, что $AM = 8$. Точка K делит сторону SB так, что $SK : KB = 7 : 3$. Ребро $SA = \sqrt{43}$. Точки M и K принадлежат плоскости α, которая перпендикулярна плоскости ABC.

а) Докажите, что точка C принадлежит плоскости α.

б) Найдите площадь сечения α.

Ответ: б) $\frac{3\sqrt{73}}{5}$.

Источник: ЕГЭ по математике 10.07.2020. Основная волна. Краснодар, Задания 14 ЕГЭ–2020

25. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $\sqrt{21}$. На ребрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причем $AM = 4$, $SK : KB = 1 : 3$.

а) Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC.

б) Найдите объём пирамиды $BCKM$.

Ответ: б) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Источник: Избранные задания по математике из последних сборников ФИПИ

26. В треугольной пирамиде $SABC$ на ребре SB взята точка M, делящая отрезок SB в отношении 3 : 5, считая от вершины S. Через точки A и M параллельно медиане BD треугольника ABC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Ответ: $95 : 9$.

Источник: А. Ларин: Тренировочный вариант № 27.

27. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна 6, а высота 4. Точки K, P, M — середины ребер AB, BC, SD.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки K, M, P.

б) Найдите площадь этого сечения.

Ответ: $\frac{3}{2}\sqrt{22}$.

Источник: А. Ларин: Тренировочный вариант № 102.

28. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ точка M — середина ребра SC, точка K — середина ребра AB.

а) Докажите, что прямая MK делит высоту SH пирамиды в отношении 1 : 3.

б) Найдите угол между прямой MK и плоскостью ABC, если известно, что $AB = 6$, $SA = 5$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{39}}{12}$.

Источник: А. Ларин: Тренировочный вариант № 121.

29. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ все ребра равны между собой. На ребре PC отмечена точка K.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью ABK является трапецией.

б) Найдите угол, который образует плоскость ABK с плоскостью основания пирамиды, если известно, что $PK : KC = 3 : 1$.

Ответ: Б) $\arccos\frac{7}{\sqrt{51}}$.

Источник: А. Ларин: Тренировочный вариант № 128.

34. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой сторона основания $AB = 4$, боковое ребро $AA_1 = 2\sqrt{7}.$ Точка Q — точка пересечения диагоналей грани ABB_1A_1, точки M, N и K —
середины BC, CC_1 и A_1C_1 сответственно.

а) Докажите, что точки Q, M, N и K лежат в одной плоскости.

б) Найдите площадь сечения QMN.

Ответ: б) $6\sqrt{6}.$

Источник: Задания 19 ЕГЭ–2020, ЕГЭ по математике 10.07.2020. Основная волна. Разные задачи, Задания 14 ЕГЭ–2020

35. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой сторона основания $AB = 8$, боковое ребро $AA_1 = 2\sqrt{2}.$ Точка Q — точка пересечения диагоналей грани ABB_1A_1, точки M, N и K —
середины BC, CC_1 и A_1C_1 сответственно.

а) Докажите, что точки Q, M, N и K лежат в одной плоскости.

б) Найдите площадь сечения QMN.

Ответ: б) $18\sqrt{2}.$

Источник: ЕГЭ по математике 25.07.2020. Резервная волна. Вариант 3

36. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S.

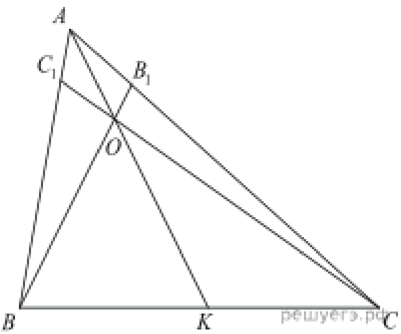
а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C, делит апофему грани ASB в отношении 2 : 1, считая от вершины S.

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SD и вершину C, делит ребро SF, считая от вершины S.

Ответ: 1 : 2.

Источник: Типовые тестовые задания по математике, под редакцией И. В. Ященко 2016

Ответы

№ п/п	№ задания	Ответ
1	548427	б) 17.
2	630185	б) $15\sqrt{19}$.
3	513277	21 : 4 (или 4 : 21).
4	521399	3:1.
5	515689	1 : 15. 
6	514717	9 : 7 (или 7 : 9).
7	560712	б) 2.
8	505677	3.
9	506059	8 или 72.
10	508137	120 : 19.
11	512440	б) $\sqrt{3}$.
12	513280	3 : 4 3 : 4.
13	514054	240.
14	521134	81.
15	527394	а) $\frac{14\sqrt{5}}{9\sqrt{3}}$; б) $\arcsin\frac{3}{5}$.
16	550262	б) $\frac{15}{17}$.
17	551188	б) $\frac{2\sqrt{39}}{13}$.
18	527460	$\frac{17\sqrt{2}}{16}$.
19	514605	б) 50.
20	514612	б) $18\sqrt{2}$.
21	633558	б) $60\sqrt{19}$.
22	505955	30.
23	627638	б) $\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{5}}{5}$.
24	548403	б) $\frac{3\sqrt{73}}{5}$.
25	562709	б) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.
26	506003	95 : 9.
27	508601	$\frac{3}{2}\sqrt{22}$.
28	511210	б) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{39}}{12}$.
29	511259	б) $\arccos\frac{7}{\sqrt{51}}$.
30	515211	б) 72.
31	521227	$\frac{72\sqrt{3}}{5}$.
32	526931	2.
33	527319	а) $\frac{7}{32}$; б) 1.
34	548491	б) $6\sqrt{6}$.
35	549114	б) $18\sqrt{2}$.
36	513266	1 : 2.
37	548817	б) $\frac{80}{3}$.
38	549116	б) $12\sqrt{2}$.

Литература:

1. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С. Б., Шестаков С.А., Юдина И.И. Геометрия. Доп. главы к учебнику 8 кл.: Учеб. пособие для учащихся школ и классов с углубл. изуч. математики / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б.Кадомцев и др.-М.: Вита-пресс, 2004. - 208 с.
2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б., Позняк Э.Г., Юдина И.И. Геометрия: Учебник для 7-9 классов средней школы / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 1990. – 336с.
3. Шарыгин И.Ф. Геометрия 7-9 кл.: Учеб. для общеобразоват. учеб.завед.- М: Дрофа, 2000. – 368с.
4. Шарыгин И.Ф. Планиметрия, 9-11 кл.: От учебной задачи к творческой: Пособие для учащихся. – М: Дрофа, 2001. – 400с.

Источники:

- https://ege.sdamgia.ru/
- https://math-oge.sdamgia.ru/
- https://ipk.68edu.ru/images/stories/2017/seminars/5-10-2017/cheva_menelaya.pdf
- https://school.mephi.ru/content/file/elibrary/math/5m.pdf
- https://www.berdov.com/docs/treugolnik/teorema-menelaya/