**Методы решения задач с экономическим содержанием**

*Габрелян А.Г., учитель*

 *математики СОШ №4*

В контрольно-измерительных материалах единого государственного экзамена по профильной математике задание 17, проверяющее у выпускников сформированность умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, на протяжении последних лет представлено **текстовой задачей с экономическим содержанием на кредиты.** Задача повышенного уровня сложности оценивается в **3 балла**. Для выполнения этого задания нужно составить математическую модель по тексту задачи.

Экономические задачи на кредиты, представленные разработчиками КИМ ЕГЭ, можно классифицировать на 3 типа:

* задачи с аннуитетными платежами;
* задачи с дифференцированными платежами;
* задачи с заданной схемой платежа.

**Аннуитетный платёж –** это **т**акая система выплат, при которой кредит выплачивается равными платежами.

**Дифференцированные платёж -** это способ погашения кредита, при котором заемщик выплачивает сумму основного долга кредита равными долями, а проценты начисляются лишь на остаток задолженности.

Каждый раз клиент платит набежавшие проценты за 1 период и 1/n часть основного долга, где n – период, на который взят кредит (количество месяцев, лет). При такой схеме платежа наибольший платёж – первый, наименьший – последний.

**Задачи с заданной схемой платежа –** платежи чётко оговариваются в условии задачи.

 Решение экономических задач на кредиты, как и любой текстовой задачи, складывается из нескольких основных этапов.

**1 этап - распознать тип задачи, прочитав условие задачи.**

* Ключевая фраза при аннуитетной схеме платежа: **долг выплачен равными платежами.**
* Ключевая фраза при дифференцированном платеже: «в такой-то период **долг должен быть на** **одну и ту же величину меньше долга предыдущего периода»**.
* Взадачах с заданной схемой платежа даётся таблица, согласно которой происходят выплаты.

**2 этап** -    **выбор переменных.**

Условия задач содержат многозначные числа, поэтому целесообразно введение переменных и решение задач в общем виде, а на последнем шаге, произвести замену соответствующих переменных их цифровыми значениями. Например, можно воспользоваться следующими обозначениями:

* S – сумма кредита
* r% - годовые (ежемесячные) проценты
* b=1+0,01r – коэффициент
* х – ежегодная (ежемесячная) выплата
* n – платежный период

Особое внимание следует уделить отработке с учащимися значения коэффициента b, который показывает, во сколько раз увеличилась сумма долга после начисления процентов.

**3 этап – составление таблицы**. Для каждого типа задачи своя таблица.

Таблица для задач с аннуитетной схемой выплаты:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Год (месяц)** | **Долг с %**  | **Выплата**  | **Долг после выплаты**  |
| 0  |  |  | S  |
| 1 год  | Sb  | x  | Sb-x  |
| 2 год  | (Sb-x)b=Sb2-xb  | x  | Sb2-xb-x  |
| 3 год  | (Sb2-xb-x)b=Sb3-x b2-xb  | x  | Sb3-x b2-xb-x  |
| 4 год  | (Sb3-x b2-xb-x)b= Sb4-xb3-xb2-xb  | x  | Sb4-xb3-xb2-xb-x  |
| 5 год  | (Sb4-xb3-xb2-xb-x)b= Sb5-xb4-xb3-xb2-xb  | x  |  Sb5-xb4-xb3-xb2-xb-x  |
| 6 год  | (Sb5-xb4-xb3-xb2-xb-x)b= Sb6-xb5-xb4-xb-3xb2-xb  | x  | Sb6-xb5-xb4-xb-3xb2-xb-x  |
|  |  |  |  |
| n год  | Sbn-xbn-1-xbn-2-…-xb2-xb  | x  | Полная выплата, долг равен 0 (меньше 0)  |

Таблица для задач  **на кредиты с дифференцированной схемой платежа**:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Год (месяц)** | **Долг с %**  | **Выплата**  | **Долг после выплаты**  |
| 0  |  |  | S  |
| 1 | Sb | Sb - (n-1)S n | (n-1)S n |
| 2  | (n-1)Sb  n  | (n-1)Sb - (n-2)S n n  | (n-2)S n  |
|  |  |  |  |
| n-1  | 2Sb  n  | 2Sb \_ Sn n  | Sn  |
| n  | Sb n  | Sb n  | 0  |

**4 этап** -  **составление уравнений и неравенств.** При составлении уравнений необходимо уделить внимание единицам измерения – они должны быть одинаковыми для всех одноименных величин.

**5 этап** - **решение полученного уравнения, неравенства или системы.**

**6 этап** - **исследование полученного результата и нахождение ответа** на поставленный вопрос задачи.

**Рассмотрим примеры решения задач.**

1. ***Задача c ануитетной схемой выплаты.***

 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк *X* рублей. Какой должна быть сумма *X*, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Решение.

Пусть *S= 6902000 руб. – сумма кредита*

*r=12,5 % - процент банка*

*b= 1+r/100=1+0,125=1,125=9/8 – коэффициент*

*n=4*

*x руб.-ежегодная выплата*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Год**  | **Долг с %**  | **Выплата**  | **Долг после выплаты**  |
| 0  |  |  | S  |
| 1 год  | Sb  | x  | Sb-x  |
| 2 год  | (Sb-x)b=Sb2-xb  | x  | Sb2-xb-x  |
| 3 год  | (Sb2-xb-x)b=Sb3-x b2-xb  | x  | Sb3-x b2-xb-x  |
| 4 год  | (Sb3-x b2-xb-x)b= Sb4-xb3-xb2-xb  | x  | Sb4-xb3-xb2-xb-x  |

*По условию четырьмя выплатами Алексей должен погасить кредит полностью, поэтому составим уравнение:*

;



 *x= 2 296 350 (руб.)*

 *Ответ:2 296 350 руб.*

1. ***Задача с дифференцированной схемой выплаты.***

15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение.

Пусть *S -сумма кредита*

*r- % - процент банка*

*b= 1+r/100 – коэффициент*

*n=19*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **месяц**  | **Долг с процентом**  | **Выплата**  | **Остаток долга**  |
| **0**  |    |    |    |
| **1**  | Sb  | Sb -18/19 S  | 18/19 S  |
| **2**  | 18/19 Sb  | 18/19 Sb – 17/19 S  | 17/19 S  |
|  |  |  |  |
| **18**  | 2/19 Sb  | 2/19 Sb - 1/19S  | 1/19S  |
| **19**  | 1/19S  | 1/19Sb  | 0  |

*Зная, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит, составим уравнение:*

(Sb/19)⋅(19+18+…+1) – (S/19)⋅(18+17+…+1) =1,3 S

10 Sb – 9=1,3

 b= 1,03



r=3%

 *Ответ 3 %*

1. ***Задача с заданной схемой платежа.***

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на *r* процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где *r* — целое число;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Дата** | **15.01** | **15.02** | **15.03** | **15.04** | **15.05** | **15.06** | **15.07** |
| Долг(в млн рублей) | 1 | 0,6 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0 |

Найдите наибольшее значение r , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

Решение.
Пусть *1млн руб. -сумма кредита
r- % - процент банка, целое число
b= 1+r/100 – коэффициент*

*n=6*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***месяц***  | ***Долг с процентом*** ***млн руб***  | ***Выплата******млн руб***  | ***Остаток долга*** ***млн руб***  |
| ***0***  |  |  | *1*  |
| ***1***  | *1b*  | *b-0,6*  | *0,6*  |
| ***2***  | *0,6 b*  | *0,6 b - 0,4*  | *0,4*  |
| ***3***  | *0,4 b*  | *0,4 b - 0,3*  | *0,3*  |
| ***4***  | *0,3 b*  | *0,3 b – 0,2*  | *0,2*  |
| ***5***  | *0,2 b*  | *0,2 b – 0,1*  | *0,1*  |
| ***6***  | *0,1 b*  | *0,1b*  | *0*  |

*Зная, что общая сумма выплат после полного погашения кредита будет меньше 1,2 млн рублей составлю неравенство:*

*B (1+ 0,6 + 0,4+ 0,3 +0,2 + 0,1) – (0,6 + 0,4+ 0,3 +0,2 + 0,1) < 1,2;*

*2,6b -1,6<1,2;*

*2,6 b<2,8;* ;

; ; ; 

*т. к. r – целое число, то*

*r=7%*

 *Ответ: 7*

***Задачи на закрепление по каждому из типов экономических задач.***

|  |  |
| --- | --- |
| Задачи с аннуитетной схемой выплаты | В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:— каждый январь долг возрастает на 31% по сравнению с концом предыдущего года;— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 69 690 821 рубль.Сколько рублей было взято в банке, если известно, что он был полностью погашен тремя равными платежами ( то есть за три года)? (Ответ: 124 809 100 рублей) |
| 1 января 2015 года Павел Витальевич взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Павел Витальевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Павел Витальевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 125 тыс. рублей? (Ответ: на 9 месяцев) |
| Ольга хочет взять в кредит 100 000 рублей под 10% годовых. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. На какое минимальное количество лет Ольга может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24 тысяч рублей? (Ответ: 6)  |
| Задачи с дифференцированной схемой выплаты | Жанна взяла в банке в кредит 1,2 млн рублей на срок 24 месяца. По договору Жанна должна вносить в банк часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 2%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Жанной банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Жанной, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму Жанна выплатит банку в течение первого года кредитования?Ответ: 822 тыс. рублей |
| Сергей взял кредит в банке на срок 9 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на 12%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Сергеем. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Сколько процентов от суммы кредита составила сумма, уплаченная Сергеем банку сверх кредита?Ответ: 60 |
| 15-го января планируется взять кредит в банке на 18 месяцев. Условия его возврата таковы:— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?*Ответ:* 119%. |
| **Задачи с заданной схемой платежа** | В июле 2019 года планируется взять кредит в банке на три года в размере *S* млн рублей, где *S* — целое число. Условия его возврата таковы:— каждый январь долг увеличивается на 30% по сравнению с концом предыдущего года;— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Месяц и год | Июль 2019 | Июль 2020 | Июль 2021 | Июль 2022 |
| Долг(в млн рублей) | *S* | 0,7*S* | 0,3*S* | 0 |

 Найдите наименьшее *S*, при котором каждая из выплат будет больше 3 млн. руб.*Ответ: 8* |
| 15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Дата** | 15.01 | 15.02 | 15.03 | 15.04 | 15.05 | 15.06 | 15.07 |
| **Долг (в процентах от кредита)** | 100% | 90% | 80% | 70% | 60% | 50% | 0% |

 В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?*Ответ:* 22,5. |
| В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на три года в размере *S* млн рублей, где *S* — целое число. Условия его возврата таковы:— каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Месяц и год | Июль 2026 | Июль 2027 | Июль 2028 | Июль 2029 |
| Долг(в млн рублей) | *S* | 0,8*S* | 0,4*S* | 0 |

 Найдите наибольшее *S*, при котором каждая из выплат будет меньше 5 млн руб.*Ответ:8* |

 Список рекомендуемой учебно-методической литературы

1. Демоверсии, спецификация ЕГЭ -2021 (профильный уровень)
2. Открытый банк заданий www.fipi.ru, сайты http://mathege.ru; reshuege.ru.; https://math100.ru/ .
3. И.Я. Ященко, С.А. Шестаков. Модульный курс «Я сдам ЕГЭ». Математика. ЕГЭ 2018 . Профильный уровень в трех частях. Москва: Просвещение, 2018.